



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**STUDIE VYUŽITELNOSTI PDE TOOLBOXU MATLABU V
MECHANICE**

STUDY OF MATLAB PDE TOOLBOX USABILITY IN MECHANICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Patrik Kováč

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Robert Grepl, Ph.D.

BRNO 2021

Zadaní diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Patrik Kováč
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	doc. Ing. Robert Grepl, Ph.D.
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Studie využitelnosti PDE toolboxu MATLABu v mechanice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce se bude zabývat ověřením vlastností a praktické využitelnosti PDE toolboxu MATLABu pro výpočty v mechanice. Toolbox může provádět mechanické (lineární statickou analýzu, modální analýzu, řešení přechodových dějů) a tepelné výpočty pomocí metody MKP.

Smyslem práce je ověřit snadnost/obtížnost řešení praktických úloh a vyhodnotit meze použití z hlediska přesnosti, citlivosti na volbu parametrů generátoru sítě a řešiče apod.

Ověření proběhne realizací výpočtu sady konkrétních inženýrských problémů, jejichž referenční řešení bude provedeno analyticky (tam kde to lze) a také s využitím standardního MKP systému, např. ANSYS.

Cíle diplomové práce:

- 1) Prostudujte dokumentaci k PDE toolboxu a seznamte se s jeho možnostmi pokud jde o řešené analýzy, práce s geometrií i matematickou podstatu procesu řešení. V rešeršní části práce toto stručně zdokumentujte.
- 2) Pro jednotlivé typy analýz v mechanice (statická, modální, přechodová) a termomechanice vytvořte sadu úloh, které lze řešit s dostatečnou přesností analyticky. Porovnejte řešení z hlediska přesnosti, citlivosti na nastavení parametrů řešiče apod.
- 3) Podobně jako v předchozím bodě, vytvořte sadu úloh se složitější geometrií, které nelze dostatečně přesně řešit analyticky. Porovnání provedte pomocí analýzy v standardním SW, např. ANSYS.
- 4) Pokuste se dosažené výsledky zobecnit a vytvořit soubor doporučení pro uživatele, který by garantoval dostatečnou přesnost řešení úloh při využití PDE toolboxu.

ABSTRAKT

Táto práca sa zaoberá praktickou využiteľnosťou PDE Toolboxu v programe MATLAB. Stručne sa venuje matematickej podstate riešenia. Práca oboznamuje s možnosťami PDE Toolboxu v tvorbe modelu, geometrie, okrajových podmienok, siete a zobrazenia výsledkov. Výsledky z PDE Toolboxu z vybraných úloh zo statickej, modálnej a prechodovej mechaniky a termomechaniky sú porovnané s analytickým riešením alebo s MKP simuláciou z programu ANSYS. Hlavná časť sa zaoberá zhodnotením a zovšeobecnením výsledkov.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

MATLAB, PDE Toolbox, ANSYS, MKP, analýza

ABSTRACT

This thesis deals with the practical usability of the PDE Toolbox in the MATLAB. It briefly describes the mathematical fundamentals of solution. The thesis presents the possibilities of PDE Toolbox in the creation of the model, geometry, boundary conditions, mesh and display of results. The PDE Toolbox results from selected tasks from static, modal and transient mechanics and thermomechanics are compared with the analytical solution or with the FEM simulation from the ANSYS. The main part deals with the evaluation and generalization of results.

KEYWORDS

MATLAB, PDE Toolbox, ANSYS, FEM, analysis

KOVÁČ, Patrik. *Mechanické výpočty v PDE toolboxu MATLABu - kritické zhodnocení*. Brno, 2021, 79 s. Diplomová práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedúci práce: doc. Ing. Robert Grepl, Ph.D.

VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že svoju diplomovú prácu na tému „Mechanické výpočty v PDE toolboxu MATLABu - kritické zhodnocení“ som vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce, s využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej diplomovej práce ďalej vyhlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto diplomovej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona Českej republiky č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákonníka Českej republiky č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora

POĎAKOVANIE

Týmto ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. Ing. Robertovi Greplovi, Ph.D. za ochotu, cenné rady a pomoc na konzultáciách.

Obsah

Úvod	8
1 PDE Toolbox	9
1.1 Matematická podstata	9
1.2 Základy metódy konečných prvkov	10
1.3 Možnosti PDE Toolboxu	12
1.3.1 Vytvorenie modelu	13
1.3.2 Tvorba a import geometrie	13
1.3.3 Materiálové vlastnosti	15
1.3.4 Zataženie, okrajové a počiatočné podmienky	15
1.3.5 Sieť	16
1.3.6 Výpočet	16
1.3.7 Zobrazenie a vyhodnotenie výsledkov	17
2 Statická štruktúrálna analýza	18
2.1 Ohýbaný prút	18
2.2 Reakčné sily vo väzbách	22
2.3 Prútová konštrukcia	25
2.4 Rotujúci disk	29
2.5 Silne zakrivený prút	32
2.6 Tlaková nádoba - 2D	36
2.7 Tlaková nádoba - 3D	38
2.8 Nomogramy súčiniteľov koncentrácie napätia	41
2.8.1 Lomený prút namáhaný ohybom	42
2.8.2 Plochý prút s priečnym otvorom namáhaný ťahom	45
2.8.3 Plochý prút s odsadením namáhaný ťahom	48
2.8.4 Kruhovú tyč s odsadením namáhaná ťahom	50
2.9 Ohrevné teleso	52
3 Modálna analýza	55
3.1 Doska	55
3.2 Vrtuľa	57
4 Prechodová analýza	60
4.1 Doska budená impulzom	60

5	Termomechanická analýza	64
5.1	Chladič	64
5.2	Ventil	67
6	Zhodnotenie	72
	Záver	74
	Literatúra	75

Úvod

Partial Differential Equation Toolbox (PDE Toolbox) je nástroj v prostredí MATLAB na riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc v 2D alebo v 3D a čase. Tento nástroj je možné využiť pre širokú škálu technických aplikácií ako výpočet deformácií, napätia a pretvorenia v lineárnej mechanike, dynamike, modálnej analýze, prenose tepla, elektromagnetizme a ďalších. Parciálne diferenciálne rovnice (PDR) rieši na trojuholníkovej (v 2D) alebo tetraédrovej (v 3D) sieti pomocou metódy konečných prvkov. PDE Toolbox umožňuje importovanie geometrie vo formáte STL a siete. Obsahuje aj omedzené nástroje na ich tvorbu. Taktiež zahŕňa funkcie na vykreslenie a analýzu výsledkov.

Prvá kapitola je rešeršná a venuje sa matematickej podstate PDE Toolboxu a jeho možnostiam.

Druhá až piata kapitola sa zaoberá samotným výpočtom vybraných úloh z oblasti statickej, modálnej a prechodovej mechaniky a termomechaniky. Výsledky z PDE Toolboxu sú porovnávané s analytickým alebo numerickým riešením z programu ANSYS.

Posledná kapitola rekapituluje výsledky a poznatky s používania PDE Toolboxu.

1 PDE Toolbox

Táto kapitola sa stručne zaoberá matematickou podstatou PDE Toolboxu. Taktiež sa venuje jeho možnostiam s tvorbou geometrie, zadávania okrajových podmienok (ďalej OP), zobrazovania výsledkov a druhom analýz. Celá kapitola vychádza zo zdroja [1].

1.1 Matematická podstata

PDE Toolbox rieši nasledujúcu skalárnu rovnicu

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f \quad (1.1)$$

a pre vlastné hodnoty rovnicu

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda du \quad (1.2)$$

alebo

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda^2 mu \quad (1.3)$$

kde koeficienty m , d , c , a , a f môžu byť funkciami priestoru, času, riešenia u alebo jeho gradientu. Výnimkou je problém vlastných hodnôt, kde koeficienty nemôžu závisieť na riešení. Všetky koeficienty s výnimkou c sú skalárne. Tento člen je v 2D geometrii maticou s rozmerom 2x2 a v 3D maticou 3x3. Keď sa m a d rovnajú nule, PDR je stacionárna. V opačnom prípade úloha závisí na čase. V prípade, že ktorýkoľvek koeficient závisí na riešení u alebo jeho gradiente, úloha je nelineárna. Pre skalárne PDR sa berú do úvahy 2 druhy OP pre každú plochu alebo hranu.

Dirichletova okrajová podmienka, tj. OP predpisujúca hodnotu riešenia u a spĺňajúca rovnicu

$$hu = r \quad (1.4)$$

kde h a r môžu byť funkciami priestoru, času a riešenia u . Zväčša $h = 1$ a r sa nastaví na príslušnú hodnotu.

Zobecnená Neumannova okrajová podmienka je taká OP, kde riešenie u splňuje rovnicu

$$\vec{n} \cdot (c \nabla u) + qu = g \quad (1.5)$$

kde \vec{n} je jednotková vonkajšia normála, q a g môžu byť funkciami priestoru, času a riešenia u a sú definované na oblasti $\partial\omega$.

PDE Toolbox taktiež rieši sústavu N rovníc. V maticovom tvare majú podobu

$$\mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{d} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.6)$$

a pre vlastné hodnoty rovnice

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{d} \mathbf{u} \quad (1.7)$$

alebo

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{a} \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{m} \mathbf{u} \quad (1.8)$$

Koeficienty \mathbf{m} , \mathbf{d} a \mathbf{a} predstavujú matice s rozmermi $N \times N$, \mathbf{f} je vektor $N \times 1$ a \mathbf{c} je $2N \times 2N$ tenzor pre 2D a $3N \times 3N$ pre 3D. Pre sústavu N PDR existujú Dirichletove a zovšeobecnené Neumannove OP v maticovom tvare

$$\mathbf{h} \mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (1.9)$$

a

$$\tilde{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{q} \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (1.10)$$

1.2 Základy metódy konečných prvkov

Diferenciálne rovnice v technickej praxi vo väčšine prípadov nie je možné riešiť analyticky, hlavne pre tvarovo zložité telesá. Preto sa využívajú približné metódy. PDE Toolbox využíva algoritmus metódy konečných prvkov (MKP) pre riešenie PDR.

Prechod od diferenciálnej rovnice k jej formulácii v MKP je ukázaný na nasledovnej eliptickej rovnici definovanej na oblasti Ω

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f \quad (1.11)$$

Táto rovnica splňuje Dirichletovu OP na časti hranice $\partial\Omega_D$ a Neumannovu OP na časti hranice $\partial\Omega_N$. Pričom $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ je hranica oblasti Ω .

Prvým krokom v MKP je previesť pôvodnú rovnicu 1.11 v diferenciálom tvare na integrálny tvar násobený testovacou funkciou v

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot (c \nabla u) + a) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \quad (1.12)$$

Použitím Greenovej vety, aplikovaním okrajových podmienok a prevedením f na ľavú stranu dostaneme

$$\int_{\Omega} ((c\nabla u) \cdot \nabla v + auv - fv)dx - \int_{\delta\Omega} (-qu + g)v ds = 0 \quad \forall v \quad (1.13)$$

Riešenie u a funkcia v patria do priestoru funkcií V . Ďalším krokom je vytvoriť N_P dimenzionálny priestor pre ktorý platí $V_{N_P} \subset V$. Konvergenca je zaručená ak sa V_P blíži k V s $N_P \rightarrow \infty$. Ak je diferenciálny operátor lineárny, potom rovnica platí pre každú testovaciu funkciu $\Phi_i \in V_{N_P}$ a môžeme rovnicu 1.13 prepísať do nasledujúcu tvaru

$$\int_{\Omega} ((c\nabla u) \cdot \nabla \Phi_i + au\Phi_i - f\Phi_i)dx - \int_{\delta\Omega} (-qu + g)\Phi_i ds = 0 \quad i = 1, \dots, N_P \quad (1.14)$$

Riešenie u aproximujeme v priestore V_{N_P} ako

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_P} U_j \Phi_j(x) \quad (1.15)$$

kde v praxi člen U_j predstavuje posuv jedného prvku a Φ_j je polynomická bázová funkcia. Po dosadení dostávame

$$\sum_{j=1}^{N_P} \left[\int_{\Omega} ((c\nabla \Phi_j) \cdot \nabla \Phi_i + a\Phi_j \Phi_i)dx + \int_{\delta\Omega} q\Phi_j \Phi_i ds \right] U_j = \int_{\Omega} f\Phi_i dx + \int_{\delta\Omega} g\Phi_i ds \quad i = 1, \dots, N_P \quad (1.16)$$

Použitím nasledujúceho označenia

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \int_{\Omega} (c\nabla \Phi_j) \cdot \nabla \Phi_i dx \quad (\text{matrica tuhosti}) \\ M_{i,j} &= \int_{\Omega} a\Phi_j \Phi_i dx \quad (\text{matrica hmotnosti}) \\ Q_{i,j} &= \int_{\delta\Omega} q\Phi_j \Phi_i ds \\ F_i &= \int_{\Omega} f\Phi_i dx \\ G_i &= \int_{\delta\Omega} g\Phi_i ds \end{aligned}$$

dostaneme rovnicu v podobe

$$(K + M + Q)U = F + G \quad (1.17)$$

V prípade, kedy nie je potrebné rozlišovať K , M a Q a zároveň F a G , dostávame známu rovnicu MKP

$$KU = F \quad (1.18)$$

Obdobným spôsobom je možné vyjadriť parabolickú a hyperbolickú parciálnu rovnicu, rovnicu pre vlastné hodnoty a ich systémy. Podrobnejšie sa tomu venuje literatúra [1].

1.3 Možnosti PDE Toolboxu

Výpočet v PDE Toolboxe sprevádzajú v tomto poradí nasledovné kroky:

- Vytvorenie modelu
- Vytvorenie/importovanie geometrie
- Definovanie materiálových vlastností
- Definovanie okrajových podmienok a zaťaženia
- Vytvorenie/importovanie siete
- Prevedenie výpočtu
- Zobrazenie a vyhodnotenie výsledkov

Na obrázku 1.1 je ukážka jednoduchého skriptu úlohy v kapitole 2.1.

```
L = 0.5;           % [m]
h = 0.03;          % [m]
F = -1000;         % [N]
E = 210E9;         % [Pa]

model = createpde('structural','static-solid'); %vytvorenie modelu
beam = multicuboid(L,b,h);                    %vytvorenie geometrie
model.Geometry = beam;                        %import geometrie
structuralProperties(model,'YoungsModulus',E, ... %material
                        'PoissonsRatio',0.3);
structuralBC(model,'Face',5,'Constraint','fixed'); %OP
structuralBoundaryLoad(model,'Face',3,'SurfaceTraction',[0;0;F/(b
*h)]); %zatazenie
generateMesh(model,'Hmax',0.01);              %vytorenie siete
result = solve(model);                        %vyocet
max_u = max(abs(result.Displacement.uz));      %max posuv
max_stress = max(abs(result.VonMisesStress))/1e6; %max sigma
reaction = evaluateReaction(result,'Face',5)   %sila vo vazbe
%% Plot
figure('Name','Mesh','NumberTitle','off')
pdeplot3D(model) %, 'ElementLabels','on','NodeLabels','on'

figure('Name','Labels','NumberTitle','off')
pdegplot(model,'FaceLabels','on','VertexLabels','on','EdgeLabels'
,'on')

title_1 = sprintf("Max Von Mises stress = %.2f [MPa]\n Max
displacement = %.2f [mm]",max_stress, max_u*1000);
figure('Name','Deformation + VonMises +
mesh','NumberTitle','off')
pdeplot3D(model,'ColorMapData',result.VonMisesStress/1e6, ...
'Deformation',result.Displacement, ...
'DeformationScaleFactor',50,...
'Mesh','on'); title(title_1)
```

Obr. 1.1: Skript v MATLABe

1.3.1 Vytvorenie modelu

PDE Toolbox umožňuje vytvoriť 3 rôzne fyzikálne modely a 1 všeobecný model o N diferenciálnych rovniciach. Príkazom *createpde* sa dajú vytvoriť nasledovné analýzy:

- Štruktúrálna analýza, ktorá sa ďalej delí na statickú, prechodovú a modálnu úlohu a frekvenčná odozvu. Každú z analýz je možné nastaviť ako: 3D, rotačne symetrickú, rovinnú napätosť alebo deformáciu.
- Termomechanická analýza - ustálený a prechodový stav. Obe je možné riešiť ako 3D alebo rotačne symetrickú úlohu v 2D.
- Elektromagnetická analýza, ktorá sa delí na elektrostatickú a magnetostatickú. Obe sú dostupné iba v 2D.
- Všeobecný model, kde sa pracuje priamo s koeficientami diferenciálnej rovnice 1.1 alebo systému rovníc 1.6.

Táto práca sa venuje prvým dvom uvedeným.

1.3.2 Tvorba a import geometrie

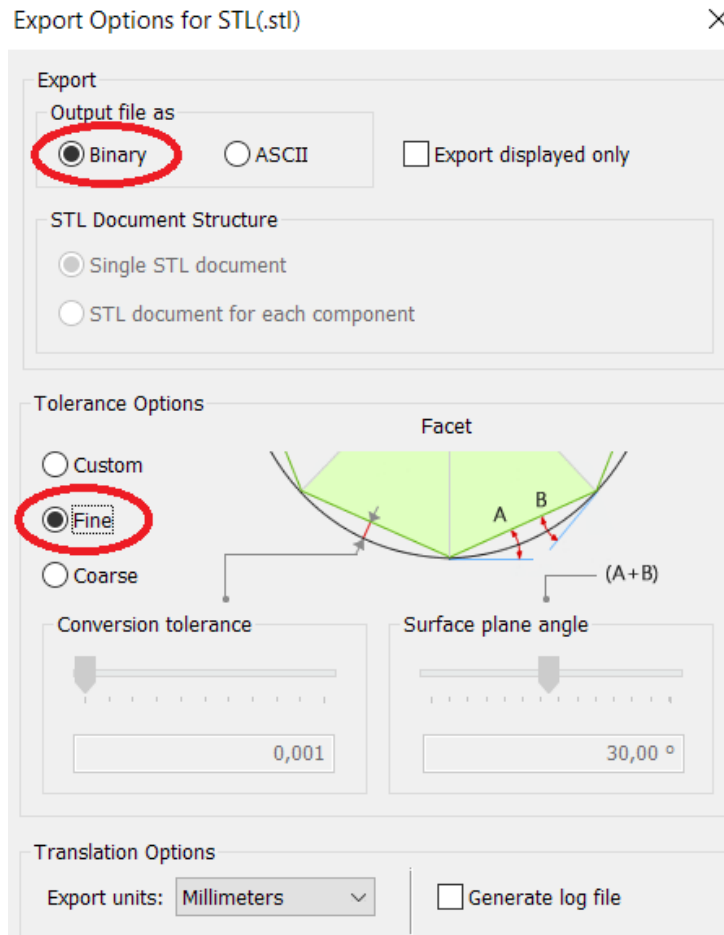
PDE Toolbox rozoznáva 4 geometrické entity - *Cell*, *Face*, *Edge* a *Vertex* - (objem, plocha, hrana a bod), ktoré môže vytvárať a zadávať do nich okrajové podmienky.

Nástroje pre tvorbu geometrie, ktoré obsahuje PDE Toolbox, sú značne omedzené a vzťahujú sa len na základné geometrické tvary. V 2D sú to príkazy zo zastaralého a vývojármi ďalej nepodporovaného rozhrania PDE Modeler. Tvorba 3D geometrie sa vzťahuje výhradne na kváder, valec a guľu.

Ďalšia možnosť tvorby geometrie je cez príkazy MATABu *polyshape* a *alphaShape*, ktoré umožňujú jednoduchšiu tvorbu zložitejšej geometrie.

Vytvorenú 2D geometriu je možné vertikálne vytiahnuť do priestoru pomocou príkazu *extrude*. Medzi uzatvorenými hranami sa dá vytvoriť plocha, čím sa jedno teleso rozdelí na dve. Táto funkcia je obmedzená len na základné geometrické telesá.

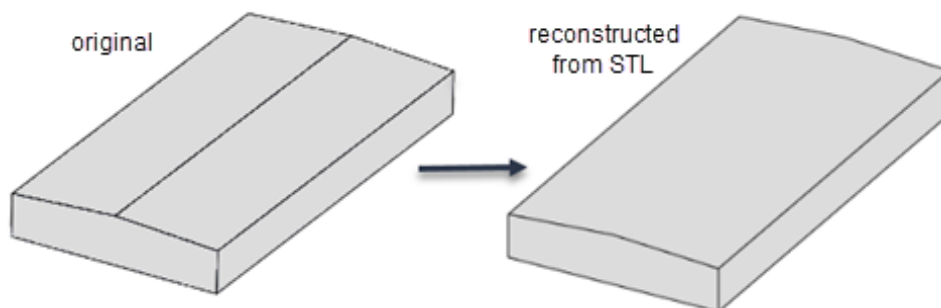
Importovaná geometria musí mať formát STL. Zdroj [1] ukazuje možnosť importu 2D geometrie v tomto formáte. Bežné CAD programy však nedovoľujú export 2D geometrie do STL. Taktiež je v tomto zdroji ukázaná možnosť importu zostavy s viacerými telesami. Túto možnosť však PDE Toolbox neumožňuje a iná časť zdroja [1] uvádza, že to nie je možné. Importovanie je obmedzené na 1 teleso, čo platí aj pre zostavy, kde sa všetky hrany dotýkajú. Takúto zostavu je potrebné najskôr exportovať do formátu, ktorý zlúči objemy (napr. STEP) a tú následne exportovať do STL. Doporučené nastavenie exportu ukazuje obrázok 1.2.



Obr. 1.2: Nastavenie exportu do STL

Pre dodržanie SI jednotiek sa musí geometria po importe tisícnásobne zmenšiť príkazom *scale* (CAD nemá možnosť exportu v metroch).

Pri importovaní geometrie sa strácajú hrany a zlučujú plochy, ako ukazuje obrázok 1.3. Tento problém znemožňuje zadať okrajové podmienky na niektoré hrany alebo plochy a taktiež znemožňuje delenie telies podľa hrán.



Obr. 1.3: Strata hrany pri importe STL [1]

1.3.3 Materiálové vlastnosti

PDE Toolbox funguje bez jednotiek a je potrebné dosádzať veličiny v jednotkách SI alebo v konzistentných jednotkách. Uhol sa zadáva iba v radiánoch.

Štruktúrálna analýza podporuje výlučne konštantné materiálové charakteristiky. Z toho vyplýva, že výpočty sú možné len v lineárnej elastickej oblasti s malými deformáciami. Rôzne objemy (v 3D) a rôzne plochy (v 2D) môžu mať rozličné materiálové charakteristiky. V termomechanickej analýze môžu byť materiálové vlastnosti funkciou teploty.

1.3.4 Zatiaženie, okrajové a počiatočné podmienky

Táto podkapitola obsahuje zoznam možných OP PDE Toolboxu. Nie sú spomenuté elektrické a magnetické OP.

Štruktúrálna analýza:

- Deformačné OP - posuvy v smeroch súradnicového systému na plochy, hrany a body
- Silové OP - normálový tlak a tlak v smeroch súradnicového systému na plochu, sila pôsobiaca v bode a tuhosť (pružina) na plochu v smeroch súradnicového systému. Tieto OP nie je možné zadať v modálnej analýze
- Objemové OP - gravitačné zrýchlenie, teplota (dajú sa použiť výsledky z termomechanickej analýzy), uhlová rýchlosť - len pre 2D rotačne symetrickú úlohu
- Počiatočné podmienky v prechodovej analýze - posuv a rýchlosť v čase 0 (dajú sa použiť výsledky z predchádzajúcej štruktúrálnej analýzy)
- Tlmenie - prechodová alebo frekvenčná analýza - koeficienty konštrukčného a materiálového tlmenia (α a β) alebo relatívne tlmenie ζ

Termomechanická analýza:

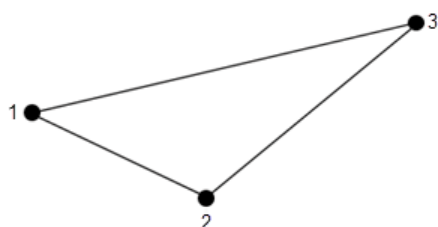
- OP - teplota, tepelný tok, konvekcia a emisivita na plochy (3D) a hrany (2D)
- Počiatočné podmienky v prechodovej termomechanickej analýze - teplota v čase 0 (dajú sa použiť výsledky s predchádzajúcej termomechanickej analýzy)

Pri importovaní zložitejšej geometrie z STL nie je zjavné ktorá plocha je ktorá. Nasledne nie je zjavné na ktorú plochu je zadaná OP. Je potrebné vytvoriť bod a použiť funkciu, ktorá nájde najbližšiu plochu, hranu alebo bod. Toto je názorne ukázané v kapitole 2.9.

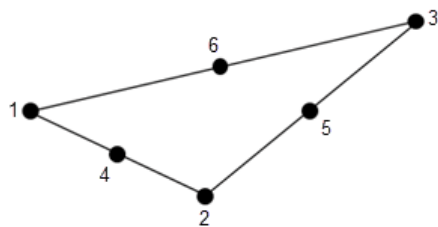
OP môžu byť funkciou času alebo priestoru (impulzová alebo líniová sila). Moment nie je možné zadať priamo.

1.3.5 Sieť

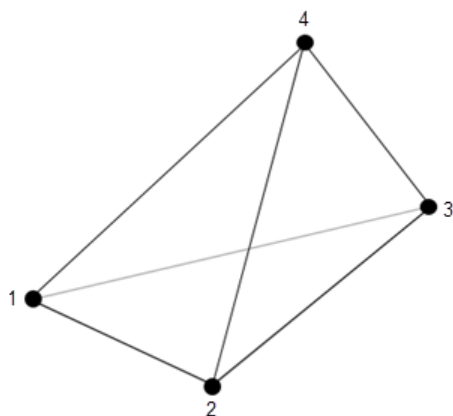
PDE Toolbox dokáže generovať sieť s trojuholníkovými prvkami v 2D a štvorstennými v 3D. Oba prvky majú dve varianty - lineárny a kvadratický (predvolený). Prvky s uzlami sú zobrazené na obrázku 1.4. Sieť nie je možné upravovať s výnimkou starého prostredia PDE Modeler. Dá sa nastaviť iba minimálna a maximálna veľkosť prvku celej siete. Toolbox ponúka možnosť siet importovať.



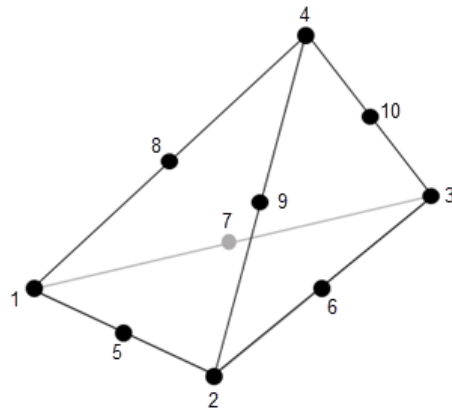
(a) 2D lineárny prvok



(b) 2D kvadratický prvok



(c) 3D lineárny prvok



(d) 3D kvadratický prvok

Obr. 1.4: Prvky v PDE Toolboxe [1]

Existuje funkcia pre zistenie kvality siete, ktorá vracia hodnotu v intervale 0 až 1, kde 1 znamená optimálnu sieť. Taktiež je možné zobrazíť a spočítať objem alebo plochu prvkov s určitou kvalitou alebo ich histogram. Popríklad koľko percent objemu geometrie tvorí sieť.

1.3.6 Výpočet

Prevedenie výpočtu všetkých analýz je cez príkaz *solve*. PDE Toolbox neposkytuje žiadnu možnosť sledovania progresu počas výpočtu a jeho konvergenciu. Umožňuje zobrazenie správy s počtom úspešných a neúspešných časových krokov a ďalších údajov, ale až po dokončení výpočtu. Táto správa sa týka iba prechodových a nelineárnych úloh.

V modálnej analýze sa musí zadať frekvenčný rozsah na ktorom bude počítat vlastné frekvencie. Pre nájdenie veľmi nízkych vlastných frekvencií blízkyh nule sa doporučuje zadať nižšiu hodnotu ako zápornú. Pri prechodovej analýze sa definuje vektor časových krokov v ktorých má prebehnúť výpočet. Pre frekvenčnú analýzu je možné použiť výsledky z modálnej analýzy.

Riešič obyčajných diferenciálnych rovníc má možnosť nastaviť absolútnu a relatívnu toleranciu. Nelineárny riešič obsahuje nastavenie veľkosti rezídua, maximálny počet iterácií a minimálny krok. Podrobnejšiemu popisu riešiča sa venuje literatúra [1].

1.3.7 Zobrazenie a vyhodnotenie výsledkov

Podľa druhu analýzy je výsledkom výpočtu výpis zložiek napätia, posuvov, rýchlostí, zrýchlení a teplôt v každom prvku siete. Tieto dáta je možné vykresliť vo farebnej škále na danej geometrii alebo sieti.

Toolbox obsahuje funkcie pre interpolovania výsledkov v určitom bode alebo na definovanej ceste. Nie je možné vybrať hranu po ktorej vykreslí výsledky. Treba zadať súradnice bodov na hrane, čo je užívateľsky neprívetivé riešenie. Ďalej je možné vyčíslit hodnoty reakčných síl vo väzbách a tepelný tok vybranou plochou.

Pri vykresľovaní výsledkov nie je možné vytvárať rezy a priamo sa pozrieť do vnútra geometrie. Tento problém sa dá vyriešiť očíslovaním prvkov siete a následne zobraziť prvky s určitým indexom.

2 Statická štruktúrálna analýza

Kapitola obsahuje sériu statických úloh mechaniky. Riešenie úloh v prostredí MATLAB R2021a (niektoré v 2020b) PDE Toolbox je porovnávané s analytickým riešením alebo s MKP výpočtom v programe ANSYS 2020 R2. Na tvorbu zložitejšej geometrie je využitý program Solid Edge 2020. Všetky programy sú používané v študentskej licencií. V tejto verzii má ANSYS obmedzenie na 32 000 uzlov alebo elementov. Každá úloha v tejto práci je modelovaná s najjemnejšou možnou sieťou ktorú tento limit dovoľuje.

Všetky výpočty prebiehali na nasledujúcom hardvéri: CPU Intel i7-7700K, GPU NVIDIA GeForce GTX 1080, RAM 32 GB. Špecifikácie sú udávané z dôvodu, že pri úlohách je uvádzaný čas výpočtu.

Vo všetkých analýzách sú použité kvadratické prvky. V tejto a v nasledujúcich kapitolách je použitý materiál oceľ (ak nebude uvedené inak) s vlastnosťami:

- Modul pružnosti - $E = 210 \text{ GPa}$
- Poissonova konštanta - $\mu = 0,3$
- Hustota - $\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$
- Súčiniteľ tepelnej rozťažnosti - $\alpha_l = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- Tepelná vodivosť - $\lambda = 60 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$
- Merná tepelná kapacita - $c = 434 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Vytvorené skripty pre úlohy v tejto a nasledujúcich kapitolách sú priložené v elektronickej prílohe. Príloha neobsahuje niektoré dátovo veľké STL modely.

2.1 Ohýbaný prút

Úloha sa venuje výpočtu jednostranne votknutého prútu s obdĺžnikovým prierezom zaťaženého silou na voľnom konci. Na tomto jednoduchom príklade je demonštrovaný vplyv veľkosti prvku na čas výpočtu, veľkosť výsledného napätia, posuvu a síl vo väzbe.

Geometria prútu a zaťaženie:

- Dĺžka prútu - $L = 500 \text{ mm}$
- Výška profilu - $b = 50 \text{ mm}$
- Šírka profilu - $h = 30 \text{ mm}$
- Sila na voľnom konci - $F = 1000 \text{ N}$

Analytické riešenie posuvu voľného konca a ohybového napätie v mieste votknutia a v polovici prútu popisujú rovnice 2.1 a 2.3. Vzťahy sú prevzaté z literatúry [2].

$$u = \frac{FL^3}{3EJ} = 1,76 \text{ mm} \quad (2.1)$$

kde

$$J = \frac{bh^3}{12} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{o_L} = \frac{M_{o_L}}{J} \frac{h}{2} = 66,7 \text{ MPa} \quad (2.3)$$

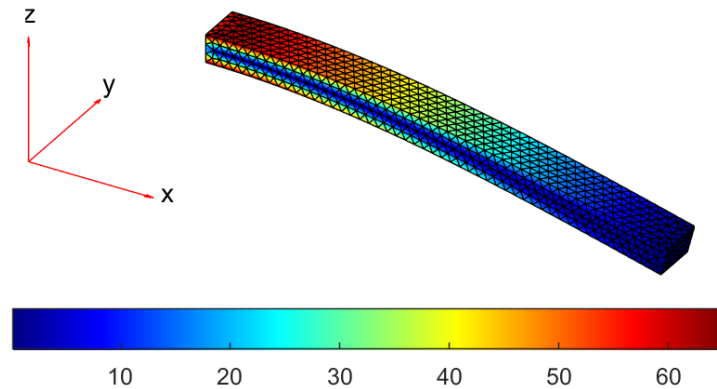
$$\sigma_{o_{L/2}} = \frac{M_{o_{L/2}}}{J} \frac{h}{2} = 33,3 \text{ MPa} \quad (2.4)$$

kde ohybové momenty sú $M_{o_L} = FL$ a $M_{o_{L/2}} = F \frac{L}{2}$

Výpočet v PDE Toolboxe

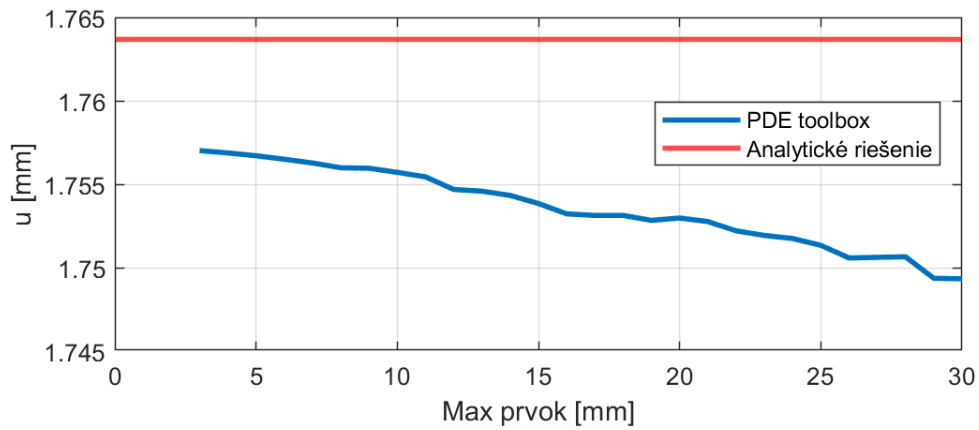
- Zamedzenie všetkých posuvov v mieste votknutia
- Maximálna veľkosť prvku - 10 mm
- Počet uzlov - 12 000
- Čas výpočtu 2,5 s

Deformovaný stav s vykresleným redukovaným napätím je na obrázku 2.1. Posuv voľného konca je $u_{PDE} = 1,76 \text{ mm}$ a ohybové napätie v polovici prútu dosahuje hodnotu $\sigma_{x_{L/2}} = 33,3 \text{ MPa}$. Tieto výsledky sú v perfektnnej zhode s analytickým riešením. Maximálne ohybové napätie v mieste votknutia má hodnotu $\sigma_{x_L} = 81,5 \text{ MPa}$. Napätie je výrazne vyššie z dôvodu troj-osej napätosti v okolí väzby. Pre lepší popis je vyhodnotené aj redukované napätie $\sigma_{v_{M_L}} = 65,1 \text{ MPa}$, ktoré sa blíži analytickému riešeniu.

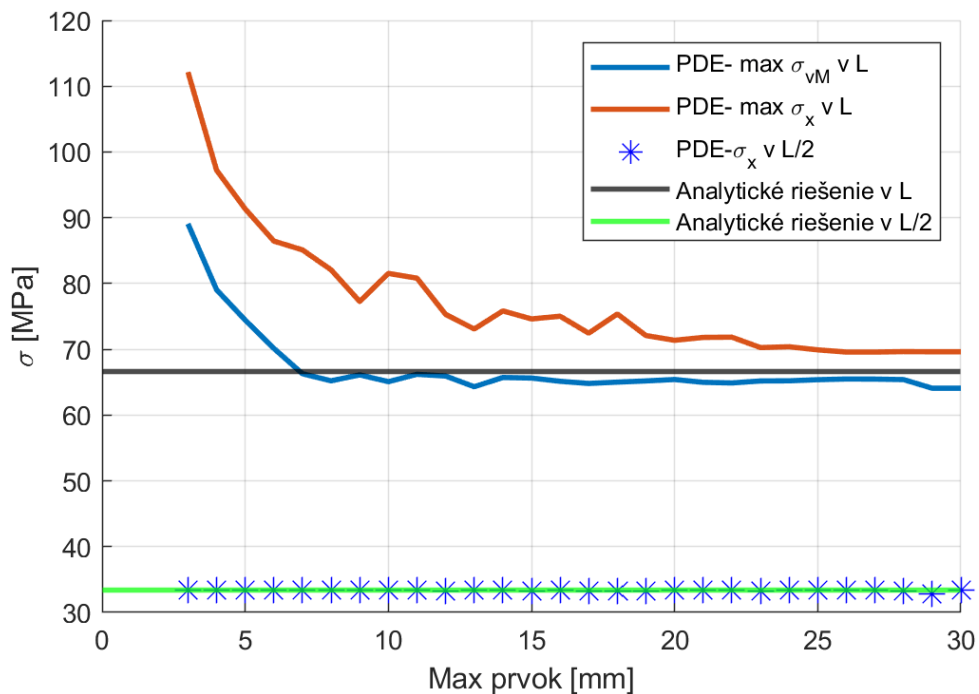


Obr. 2.1: Ohýbaný prút - redukované napätie a deformácia [MPa]

Vplyv veľkosti prvku siete na redukované a ohybové napätie a posuv je znázornený na obrázkoch 2.3 a 2.2. Posuv voľného konca a ohybové napätie v polovici prútu sú takmer nezávislé na veľkosti siete. Pri jemnej sieti sa v mieste votknutia extrémne zvyšuje ohybové a redukované napätie - votknutie je singulárny bod a hodnotenie napätia v jeho okolí je problematické.



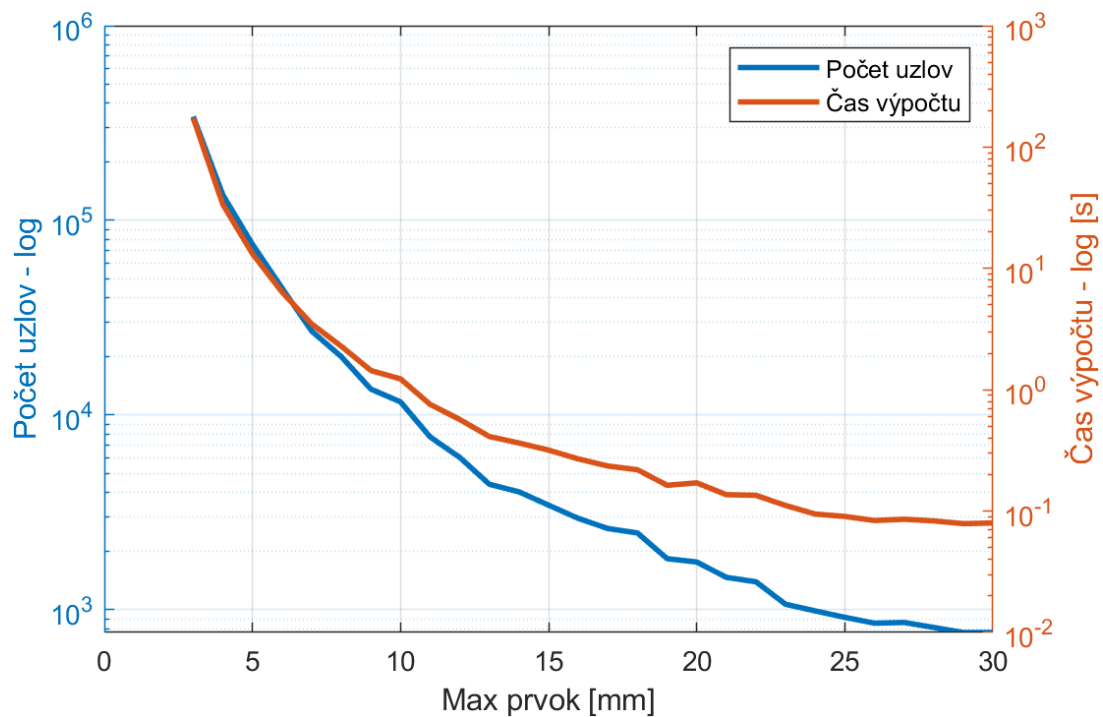
Obr. 2.2: Ohýbaný prút - závislosť posuvu na veľkosti prvku



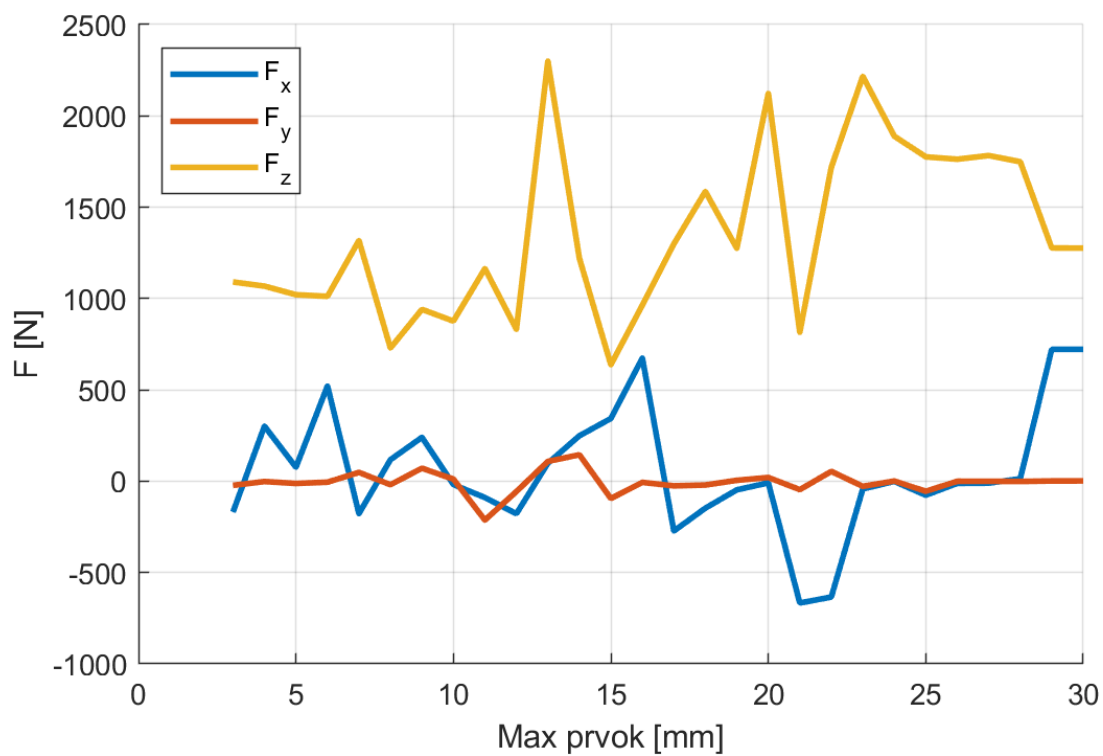
Obr. 2.3: Ohýbaný prút - závislosť napätia na veľkosti prvku

Závislosť času výpočtu a počtu uzlov na veľkosti prvku je na obrázku 2.4. Pri maximálnej veľkosti prvku 2 mm vytvorí sieť s počtom uzlov približne 1,1 milióna. Výpočet na tejto sieti sa nezmestí do pamäte RAM a začne dáta zapisovať na disk čo extrémne spomalí výpočet a v niektorých prípadoch nasleduje pád MATLABu.

Reakčné sily majú obrovský rozptyl v závislosti na veľkosti siete a ich hodnoty sú nepresné ako ukazuje obrázok 2.5. Rovnaká úloha v ANSYS-e spočíta silu vo väzbe presne a má hodnotu sily F v smere z .



Obr. 2.4: Ohýbaný prút - závislost počtu uzlov a délky výpočtu na velikosti prvku



Obr. 2.5: Ohýbaný prút - závislost reakčních sil na velikosti prvku

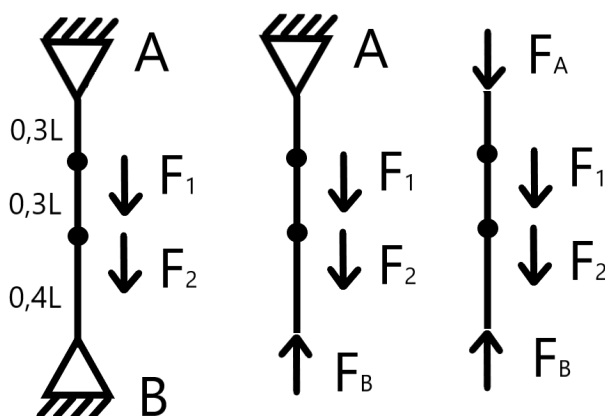
2.2 Reakčné sily vo väzbách

V tomto príklade sú určované reakčné sily staticky neurčitého prútu v závislosti na veľkosti prvku. Prút je obojstranne votknutý a zatažený dvoma osovými silami - obrázok 2.6. Zisťuje sa vhodné zavedenie síl na teleso.

Geometria prútu a zataženie:

- Dĺžka prútu - $L = 100 \text{ mm}$
- Šírka štvorcového profilu - $a = 20 \text{ mm}$
- Sila - $F_1 = 200 \text{ N}$
- Sila - $F_2 = 100 \text{ N}$
- Pôsobisko síl vyznačené na obrázku 2.6

Analytický výpočet spočíva v čiastočnom uvoľnení prútu a nahradení votknutia jednou silou, pretože sa jedná o 1D úlohu. Z uvoľneného konca sú určené VVU a to v každom úseku. Pomocou Castilianovej vety v bode B sa určí sila F_B . Úplným uvoľnením a zostavením rovníc rovnováhy sa zistí hodnota sily F_A .



Obr. 2.6: Geometria, čiastočné a úplne uvoľnenie

VVÚ po úsekoch

$$N_1 = -F_B \quad (2.5)$$

$$N_2 = F_2 - F_B \quad (2.6)$$

$$N_3 = F_1 + F_2 - F_B \quad (2.7)$$

Castilianová veta v bode B, kde je posuv nulový

$$w_B = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i l_i}{ES} \frac{\partial N_i}{\partial F_B} = 0 \quad (2.8)$$

Výsledné rovnice síl vo väzbách

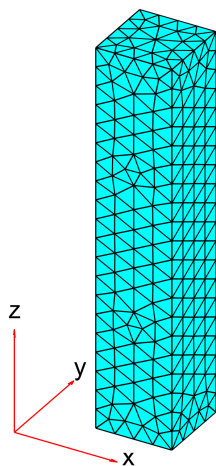
$$F_B = 0,6F_2 + 0,3F_1 = 120 \text{ N} \quad (2.9)$$

$$F_A = 0,4F_2 + 0,7F_1 = 180 \text{ N} \quad (2.10)$$

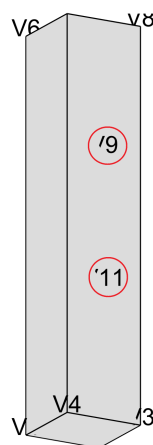
Výpočet v PDE Toolboxe:

- Zamedzenie všetkých posuvov v mieste oboch votknutí
- Maximálna veľkosť prvku - 2 – 20 mm
- Počet uzlov - 4 000
- Čas výpočtu - 25 s

Geometria a sieť sú znázornené na obrázkoch 2.7 a 2.8.



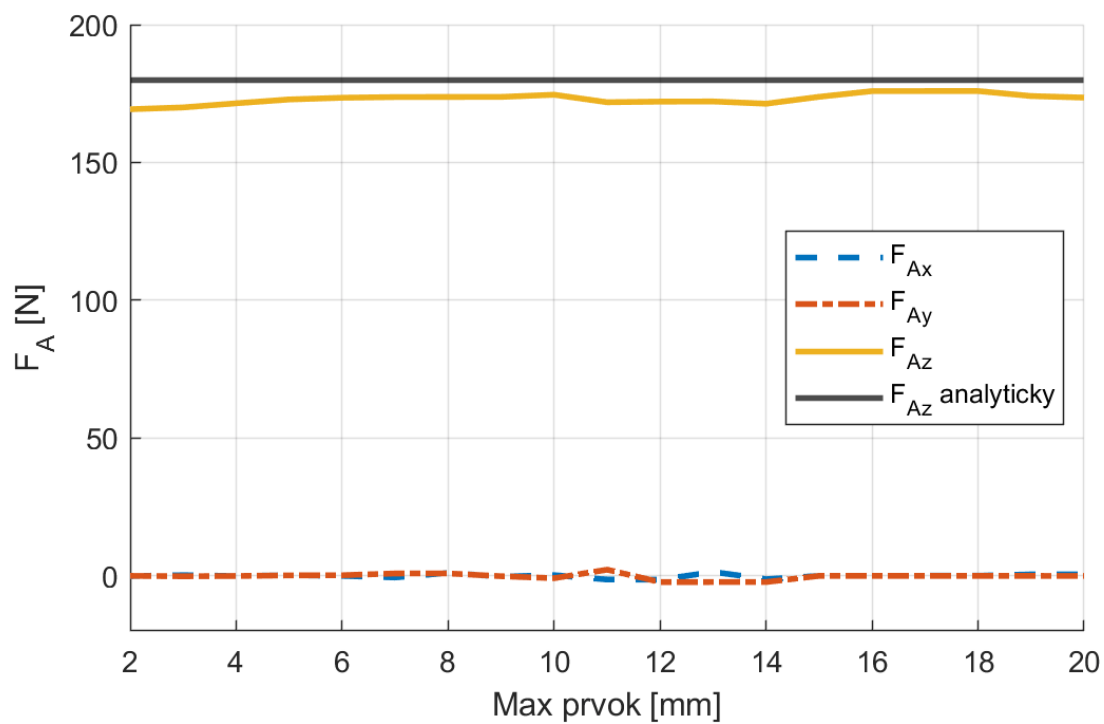
Obr. 2.7: Sieť 5 mm



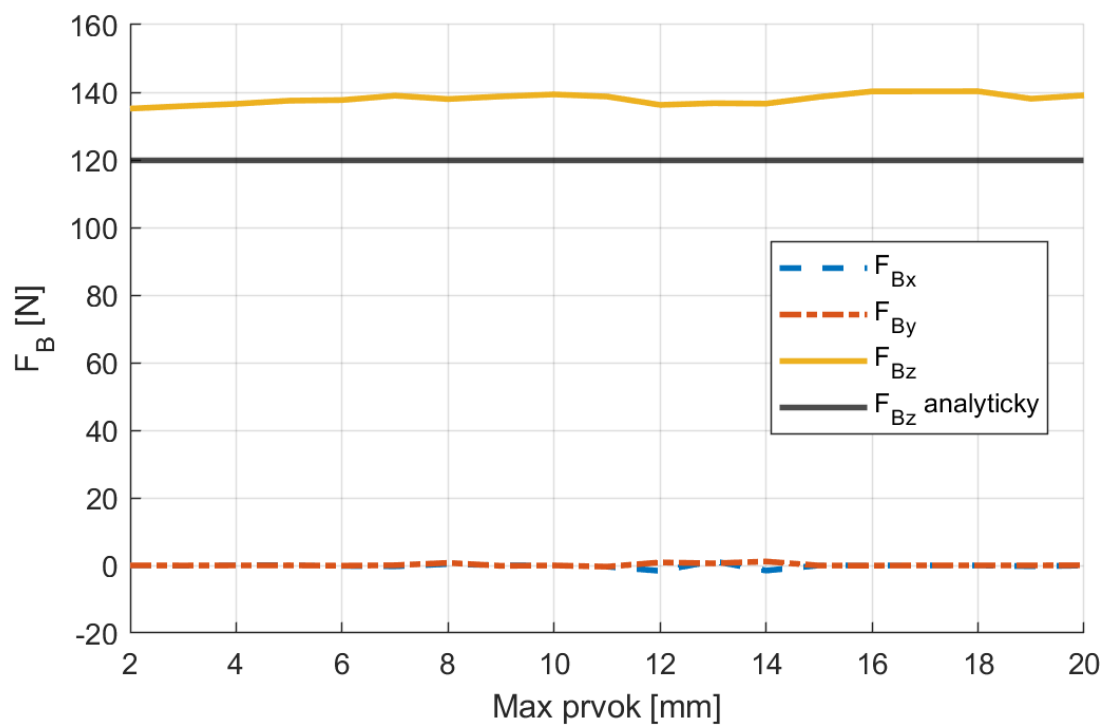
Obr. 2.8: Pôsobisko síl

Silu nie je možné zadať priamo do uzla siete. Je potrebné vytvoriť body na požadovaných súradniciach a v nich zadať silu. Sieť sa vytvoreným bodom prispôsobí a vytvorí v nich uzol - ako je vidieť na obrázku 2.7. PDE Toolbox nedovoľuje vytvorenie bodu vnútri telies, ale iba na ich povrchu. Preto je potrebné vytvoriť body na protilahlých stranách prútu, aby sa eliminoval ohybový moment. Bola otestovaná varianta s bodmi na jednej strane, ale reakčné sily vo väzbách sa výrazne líšili oproti analytickému riešeniu.

Na obrázkoch 2.9 a 2.10 je znázornená závislosť reakčných síl na veľkosti siete vo väzba A a B. Oproti úlohe v predchádzajúcej kapitole 2.1 sa v tomto prípade sily vo väzbách približne zhodujú s analytickým riešením a ich hodnota drasticky nekolíše s veľkosťou siete.



Obr. 2.9: Závislosť reakčných síl na veľkosti siete v bode A



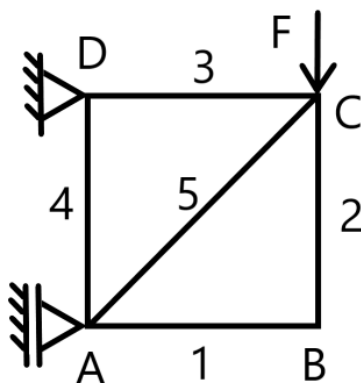
Obr. 2.10: Závislosť reakčných síl na veľkosti siete v bode B

2.3 Prútová konštrukcia

Táto kapitola sa zaoberá výpočtom jednoduchej prútovej konštrukcie znázornenej na obrázku 2.12 a modelovaním väzieb v styčníkoch.

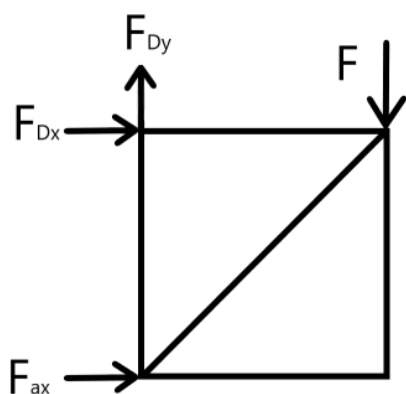
Geometria a zaťaženie:

- Dĺžka prútov jedna až štyri - $L = 1000 \text{ mm}$
- Šírka štvorcového profilu - $a = 20 \text{ mm}$
- Zaťažujúca sila v bode C - $F = 100 \text{ kN}$

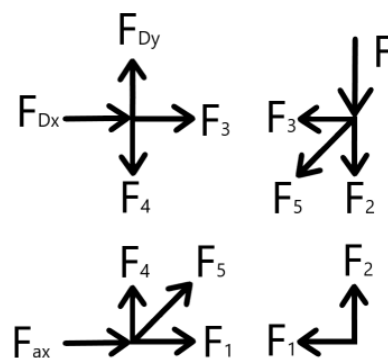


Obr. 2.11: Značenie prútov a styčníc

Analytický výpočet posuvu v bode C sa zakladá na uvoľnení celej konštrukcie a zostavení rovníc rovnováhy z ktorých vyplynú sily vo väzbách - obrázok 2.12a. Z rovníc rovnováhy v každom styčníku sa zistia osovú sily v prútoch - obrázok 2.12b. Následne z Castilianovej vety v bode C sa vypočíta posuv.



(a) Uvoľnenie konštrukcie



(b) Uvoľnenie styčníc

Obr. 2.12: Prútová konštrukcia - uvoľnenie

Výsledné sily vo väzbách

$$F_{Ax} = F \quad (2.11)$$

$$F_{Dy} = F \quad (2.12)$$

$$F_{Dx} = -F \quad (2.13)$$

Osové sily v prútoch

$$F_1 = F_2 = 0 \quad (2.14)$$

$$F_3 = F_4 = F \quad (2.15)$$

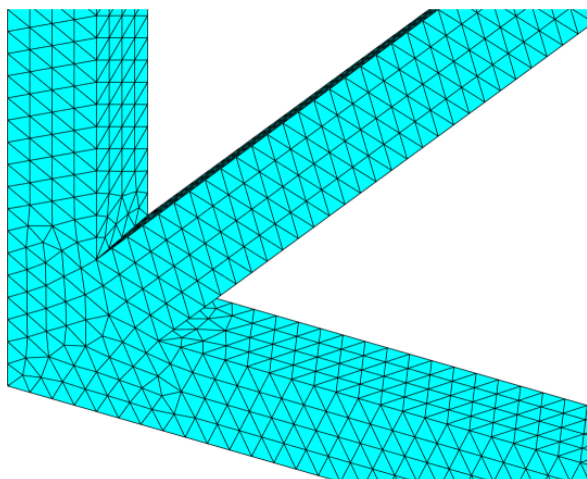
$$F_5 = -\frac{2}{\sqrt{2}}F \quad (2.16)$$

Castilianova veta v bode C, platí $N_i = F_i$

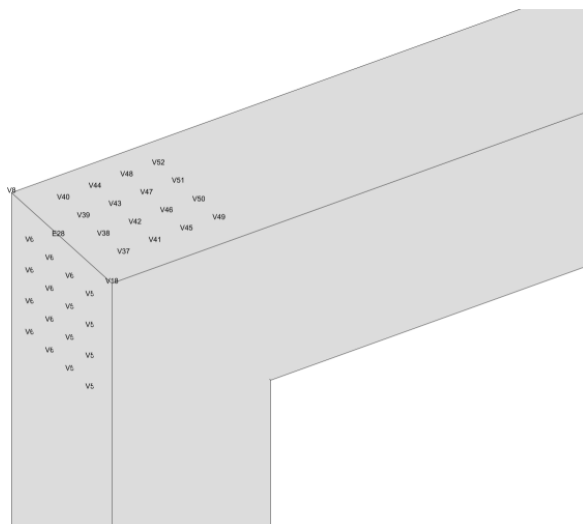
$$w_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i l_i}{ES} \frac{\partial N_i}{\partial F} \quad (2.17)$$

Po dosadení - výsledný posuv bodu C v smere y

$$w_c = \frac{LF}{ES}(2 + 2\sqrt{2}) = 5,75 \text{ mm} \quad (2.18)$$



Obr. 2.13: Prútová konštrukcia - sieť



Obr. 2.14: Prútová konštrukcia - body

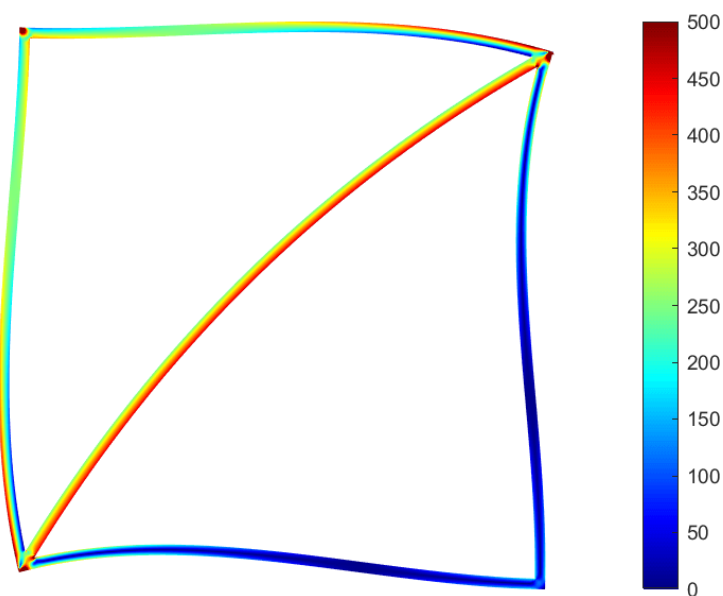
Pre zovšeobecnenie výsledkov je táto jednoduchá prútová konštrukcia riešená ako 3D úloha. Model geometrie vytvorený v CADe ako zostava nebolo možné naimportovať, pretože obsahuje viac telies. A to aj keď sa všetky plochy dotýkajú a v priestore nie sú

oddelené telesá. Pri uložení zostavy ako jedného telesa, formát STL stále obsahuje informácie o viacerých objemových entitách. Model je nutné vytvoriť ako jedno teleso alebo zostavu uložiť napríklad najskôr do formátu STEP, a ten znova uložiť ako STL. Pri tomto postupe sa stratia informácie o viacerých telesách a všetky plochy splynú.

Výpočet v PDE Toolboxe:

- Zamedzenie všetkých posuvov podľa väzieb na hranách
- Sila je zavedená v dvoch bodoch
- Maximálna veľkosť prvku - 5 mm
- Počet uzlov - 212 000
- Čas výpočtu - 36 s

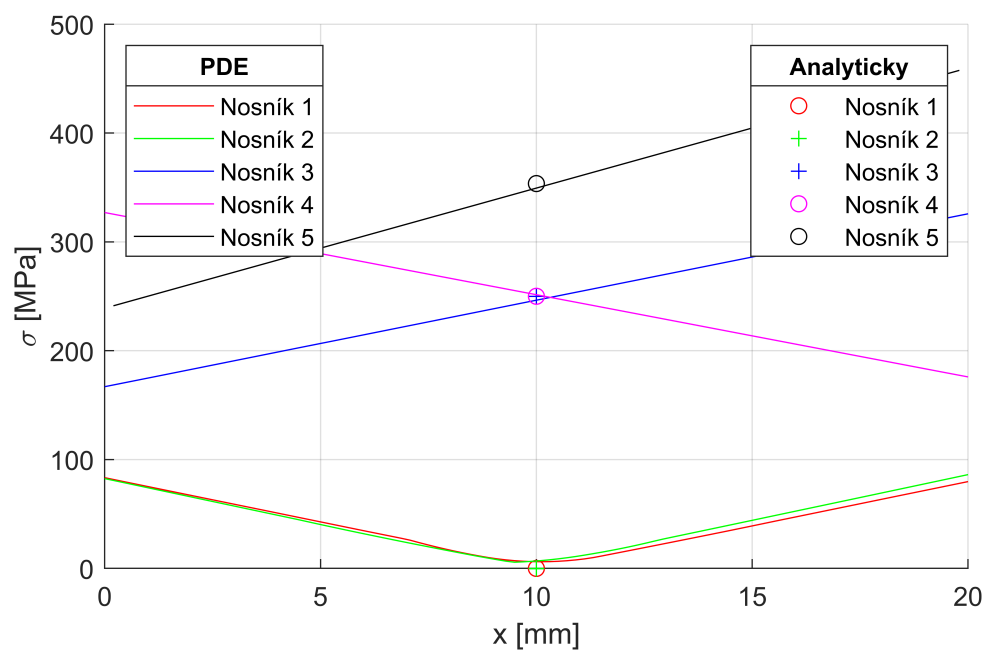
Na obrázku 2.13 je detail na vytvorenú sieť a na obrázku 2.15 je vykreslený deformovaný tvar s redukovaným napätím (farebne preškálované). Priebeh napätia v strede každého prútu je na obrázku 2.16. Napätie vypočítané analyticky je dané vzťahom $\sigma_i = \frac{F_i}{a^2}$. Z obrázkov je zrejmé, že prúty sú namáhané ohybom a v mieste väzieb vzniká veľká singularita. Posuv v bode C v smere sily F je 6,54 mm čo je o 13,8% viac ako pri analytickom riešení.



Obr. 2.15: Redukované napätie - OP na hranách

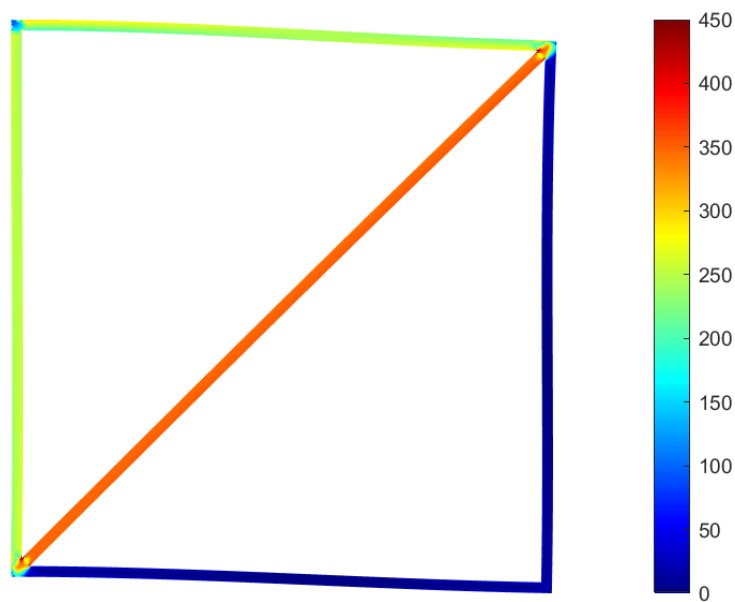
Z tohoto dôvodu je zmenené zavedenie OP. Ako vhodným riešením sa ukázal variant, kde sa vytvorí sieť minimálne 4×4 bodov, v ktorých je zamedzené posuvom podľa väzieb. Sieť vytvorených bodov nepresahuje obrys prútov - obrázok 2.14. Ďalšou (zložitejšou) možnosťou je vytvoriť OP ako funkciu polohy.

Deformovaný tvar s redukovaným napätím pri zavedení OP do siete bodov je znázornený na obrázku 2.17. Priebeh napätí v strede prútov je na obrázku 2.18. V tomto prípade

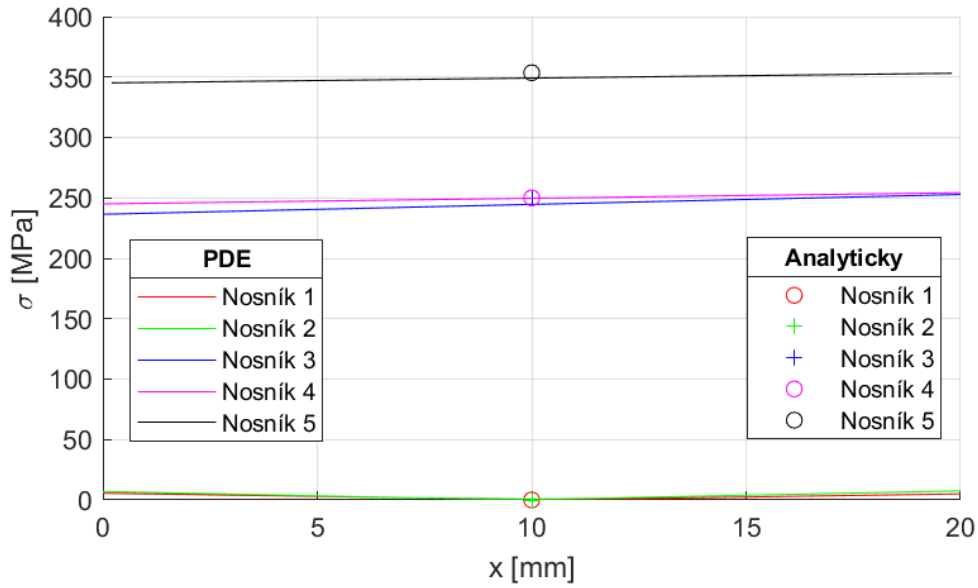


Obr. 2.16: Priebeh napätí na jednotlivých nosníkoch - OP na hranách

sa singularita v mieste väzieb a sily výrazne zmenšila. Priebeh napätí v priereze je takmer konštantný a prúty nie sú namáhané výrazným ohybom. Posuv bodu C je menší oproti analytickému riešeniu o 2,8% a má hodnotu 5,59 mm.



Obr. 2.17: Redukované napätie - OP v bodoch



Obr. 2.18: Priebeh napätí na jednotlivých nosníkoch - OP v bodoch

2.4 Rotujúci disk

V tejto kapitole je prevedený výpočet troch variant rotujúceho disku - bez otvoru, s malým a veľkým otvorom.

Geometria prútu a zataženie:

- Vonkajší polomer - $R_2 = 100 \text{ mm}$
- Hrúbka - $t = 10 \text{ mm}$
- Uhlová rýchlosť - $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Analytické riešenie posuvu u , radiálneho a obvodového napätia σ_r a σ_t popisujú rovnice 2.19, 2.20 a 2.21. Vzťahy sú prevzaté z literatúry [3].

$$u = \frac{(1 - \mu)}{8E} \rho \omega^2 \left[(3 + \mu) R_2^2 r - (1 + \mu) r^3 \right] \quad (2.19)$$

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 (R_2^2 - r^2) \quad (2.20)$$

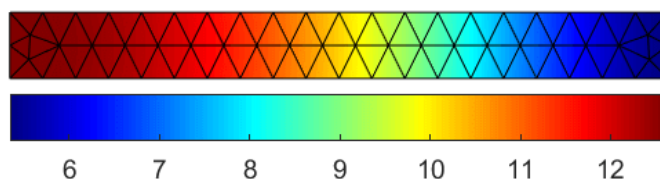
$$\sigma_t = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \left(R_2^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) \quad (2.21)$$

Úloha je modelovaná ako rotačne symetrická v 2D, kde os symetrie je v PDE Toolboxe y. Je nutné aspoň jednému bodu zamedziť posuv v osi z, aby úloha mala nula stupňov voľnosti. Na os symetrie nie je potrebné zadávať OP.

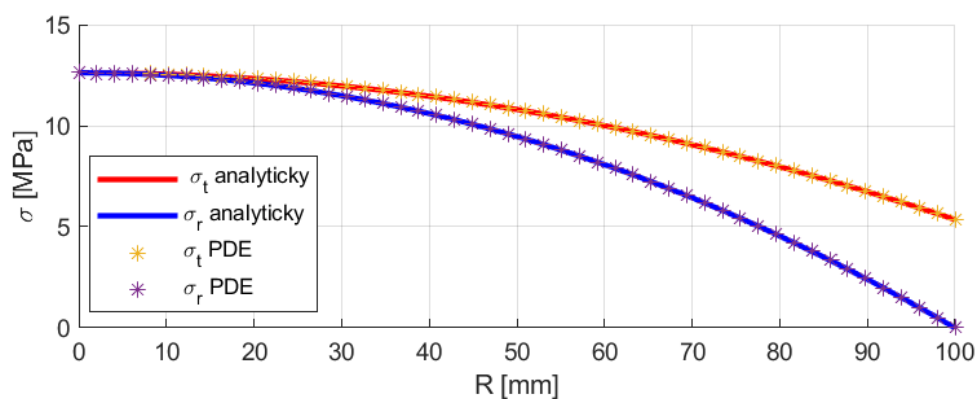
Výpočet v PDE Toolboxe - disk bez otvoru:

- Uhlová rýchlosť - $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Maximálna veľkosť prvku - 5 mm
- Počet uzlov - 220
- Čas výpočtu - 3 s

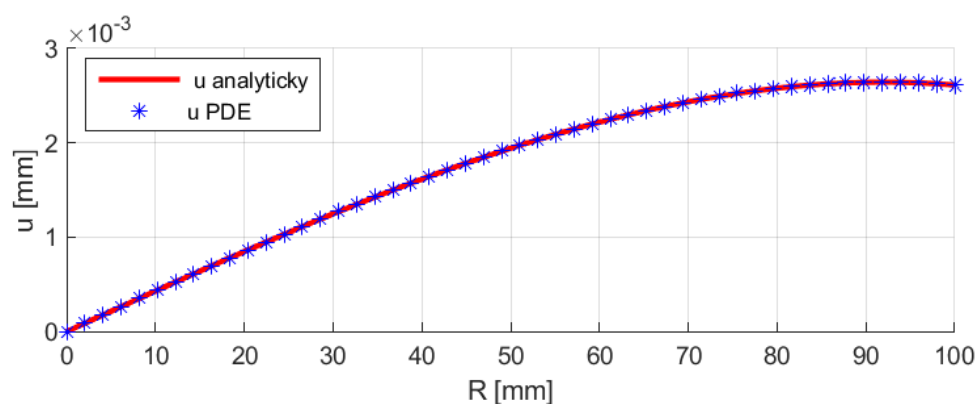
Porovnané priebehy napätí a posuvu sú na obrázkoch 2.20 a 2.21. Sieť s redukovaným napätím na obrázku 2.19. Aj pri hrubej sieti sa numerické riešenie prakticky zhoduje s analytickým.



Obr. 2.19: Disk bez otvoru - sieť a redukované napätie



Obr. 2.20: Disk bez otvoru - priebeh radiálneho a obvodového napätia

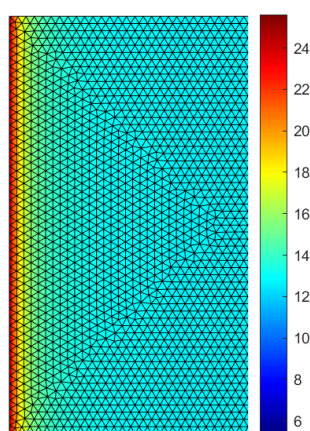


Obr. 2.21: Disk bez otvoru - priebeh posuvu

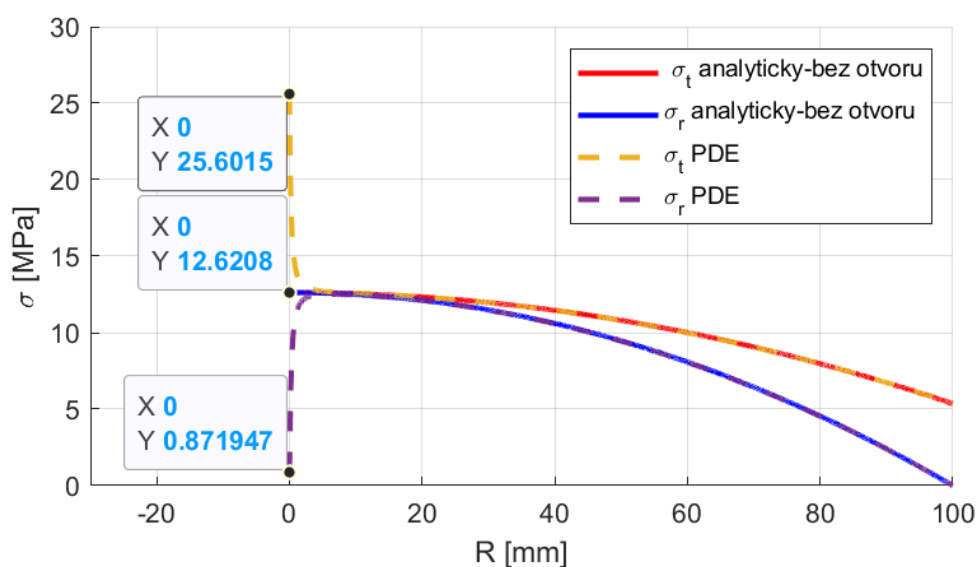
Výpočet v PDE Toolboxe - disk s malým otvorom $R_1 = 0,5 \text{ mm}$:

- Uhlová rýchlosť - $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Maximálna veľkosť prvku - $0,2 \text{ mm}$
- Počet uzlov - 117 000
- Čas výpočtu - 6 s

Pre disk s malým centrálnym otvorom, kde platí $\lim_{\frac{R_1}{R_2}} \rightarrow 0$, je obvodové napätie v blízkosti otvoru dvojnásobné ako pri disku bez otvoru a radiálne napätie je nulové [3]. Sieť s redukovaným napätím je na obrázku 2.22. Výsledky sú v zhodne s predpokladom - obrázok 2.23. Sieť je nutné dostatočne zjemniť, pri veľkom prvku sú výsledky očividne nesprávne (radiálne napätie výrazne rôzne od nuly a dokonca vyššie ako obvodové).



Obr. 2.22: Rotujúci disk s malým otvorom - sieť a redukované napätie [MPa]



Obr. 2.23: Rotujúci disk s malým otvorom - priebeh radiálneho a obvodového napätia

Analytické riešenie napätí disku s veľkým otvorom popisujú rovnice 2.22 a 2.23 [3].

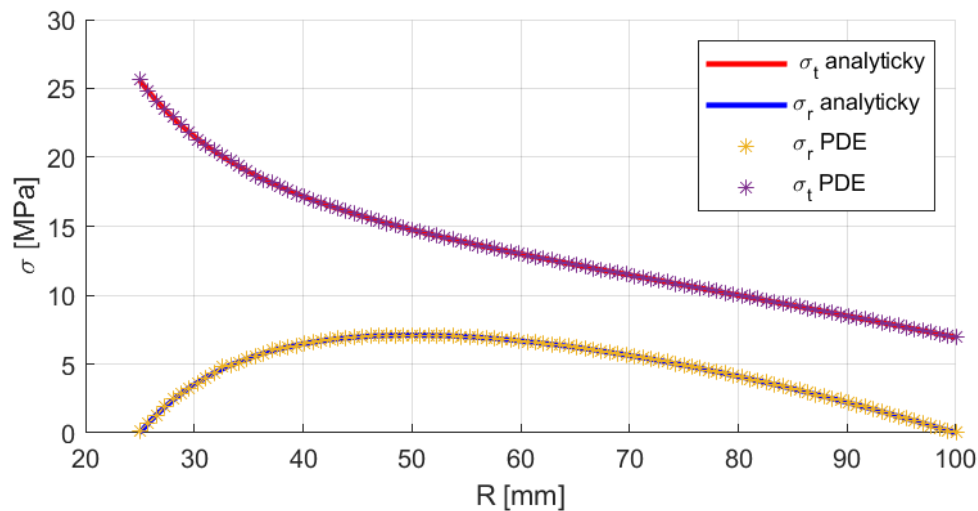
$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 - r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \quad (2.22)$$

$$\sigma_t = \frac{3 + \mu}{8} \rho \omega^2 \left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \right) \quad (2.23)$$

Výpočet v PDE Toolboxe - disku s veľkým otvorom $R_1 = 25 \text{ mm}$:

- Uhlová rýchlosť - $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Maximálna veľkosť prvku - 5 mm
- Počet uzlov - 160
- Čas výpočtu - 2 s

Porovnanie numerického výpočtu s analytickým je na obrázku 2.24. Výsledky sa perfektne zhodujú s analytickým riešením aj pre relatívne hrubú sieť.



Obr. 2.24: Rotujúci disk s veľkým otvorom - porovnanie napätí

PDE Toolbox umožňuje zadať uhlovú rýchlosť len v 2D rotačne symetrických úlohách. Týmto je výpočet obmedzený len na veľmi jednoduché geometrie.

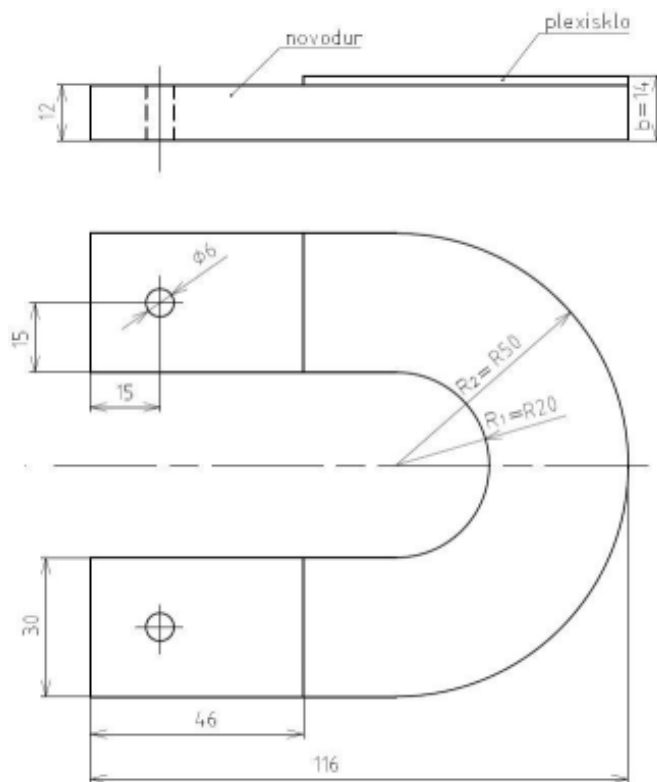
2.5 Silne zakrivený prút

Táto úloha porovnáva experimentálne zistené hodnoty napätia silne zakriveného novodurového prútu s čiastočným analytickým a numerickým riešením. Príklad je prevzatý z predmetu REM - Experimentálna mechanika, kde boli tenzometrami zistené pretvorenia vo vybraných miestach a následne spočítané napätia.

Geometria, materiálové vlastnosti prútu a zaťaženie:

- Rozmery sú uvedené na obrázku 2.25
- Poissonova konštanta - $\mu = 0,3$
- Modul pružnosti - $E = 3 \text{ GPa}$
- Zaťaženie silou - $F = 265 \text{ N}$ v jednom otvore a druhý otvor je votknutý

Rozdiel medzi novodurcom a plexisklom je minimálny. Teleso je možné považovať za homogénne.



Obr. 2.25: Silne zakrivený prút - geometria

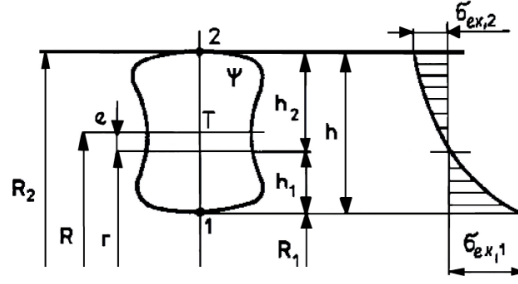
Pre silne zakrivený prút platí, že výsledok rovnice 2.24 sa rádovo rovná jednej [2]. Táto podmienka je splnená. Analytické určenie extrémov napätia vychádza z literatúry [2]. Prierez prútu je na obrázku 2.26.

$$\frac{R}{h} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{2}}{R_2 - R_1} = 1,2 \quad (2.24)$$

kde R je priemer strednice prútu a h je hrúbka v rovine krivosti.

Hodnota napätia na neutrálnej ploche je rovná 0 MPa. Poloha neutrálnej plochy sa určí podľa vzťahu 2.25.

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = 32,7 \text{ mm} \quad (2.25)$$



Obr. 2.26: Silne zakrivený prút - Prierez [2]

Vzdialenosť ťažiska od strednicovej plochy je

$$e = R_2 - R_1 - r = 2,3 \text{ mm} \quad (2.26)$$

Ohybový moment pôsobiaci na strednicu vo vzdialenosti $L = 85 \text{ mm}$ medzi osou otvoru a najvzdialenejším bodom strednice je

$$M_o = FL = 22\,525 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (2.27)$$

Výsledné extrémny napätia popisujú rovnice 2.28 a 2.29, kde podľa obrázka 2.26 je $h_1 = r - R_1$ a $h_2 = R_2 - r$ a S je plocha prierezu prútu.

$$\sigma_{ex1n} = \frac{M_o}{S e} \frac{h_1}{R_1} = 15,1 \text{ MPa} \quad (2.28)$$

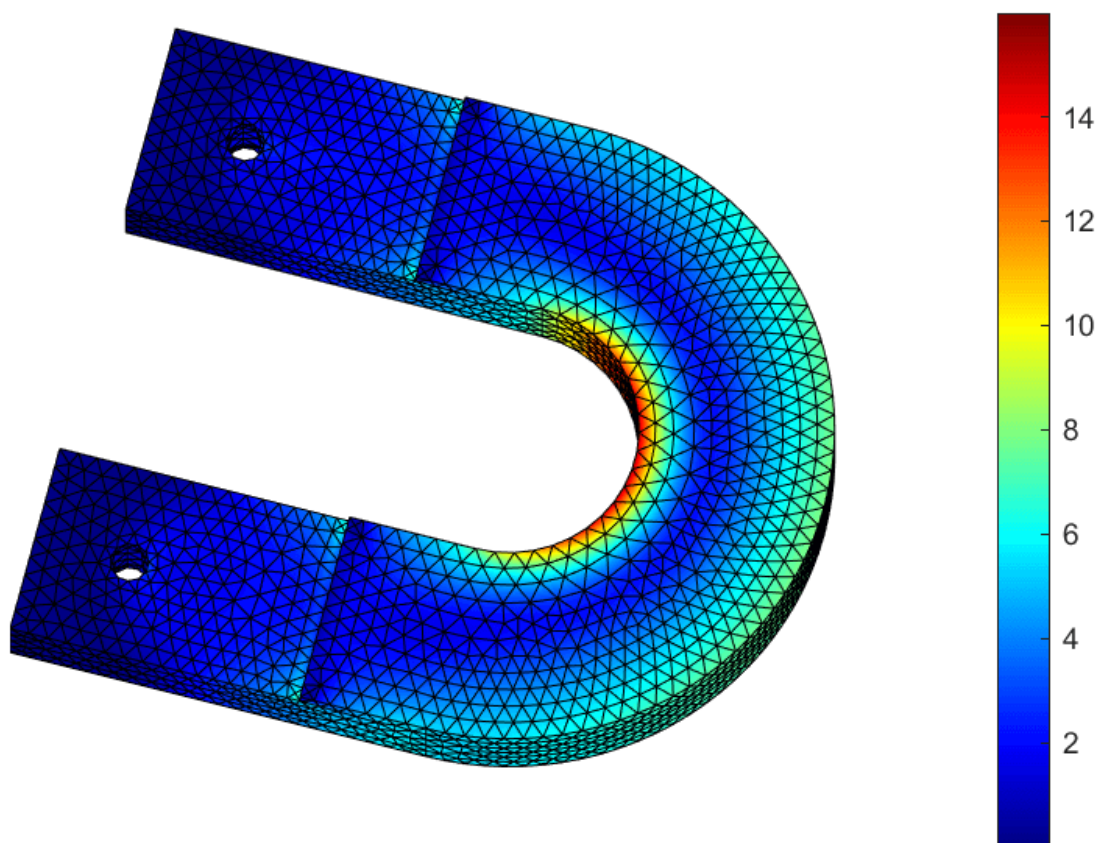
$$\sigma_{ex1n} = \frac{M_o}{S e} \frac{h_2}{R_2} = 8,2 \text{ MPa} \quad (2.29)$$

Výpočet v PDE Toolboxe:

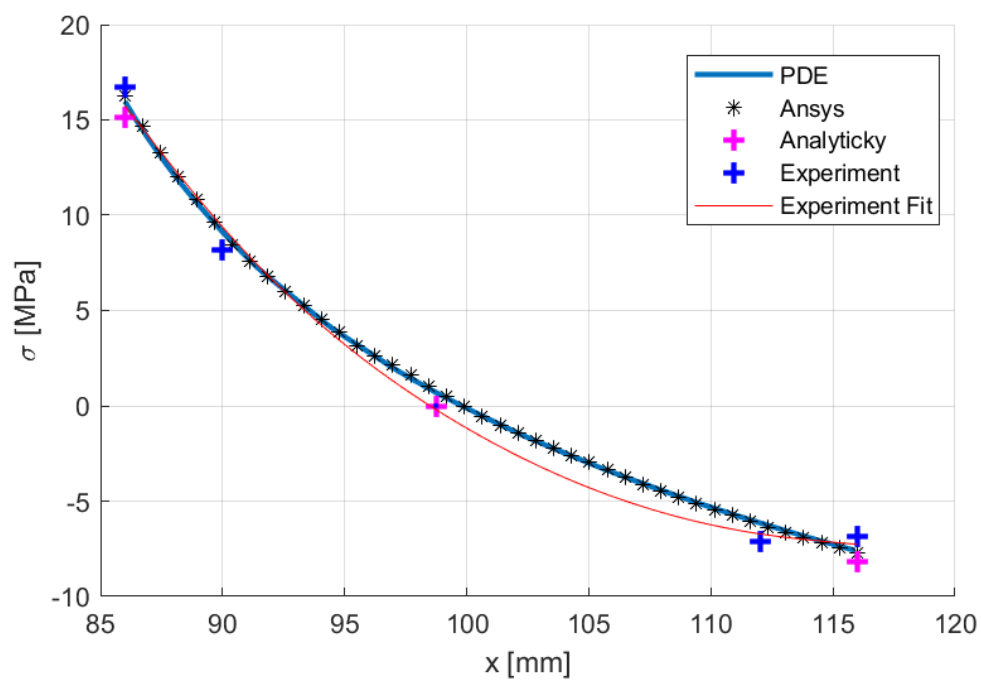
- Maximálna veľkosť prvku - 3 mm
- Počet uzlov - $46\,000$
- Čas výpočtu - 10 s
- Zataženie v otvore zadané ako *SurfaceTraction* s hodnotou $\frac{F}{S}$, kde S je plocha otvoru

Sieť s redukovaným napätím je na obrázku 2.27. Porovnanie výsledkov znázorňuje obrázok 2.28. Numerické výsledky sú v dobrej zhode s analytickým riešením a experimentálnymi dátami.

V rámci tejto úlohy bolo testované aj zavedenie sily do vytvoreného bodu v otvore. Pri zakrivenej geometrii nastal problém, že presné súradnice vytváraného bodu neležali na ploche výslednej siete a bod nedovolilo vytvoriť. Sieť sa bodu neprispôsobila, ako tak bolo v príklade v kapitole 2.2. Pri zakrivenej geometrii je potrebné bod vytvoriť presne v mieste kde bude uzol výslednej siete.



Obr. 2.27: Silne zakrivený prút - Redukované napätie [MPa]



Obr. 2.28: Silne zakrivený prút - porovnanie výsledkov

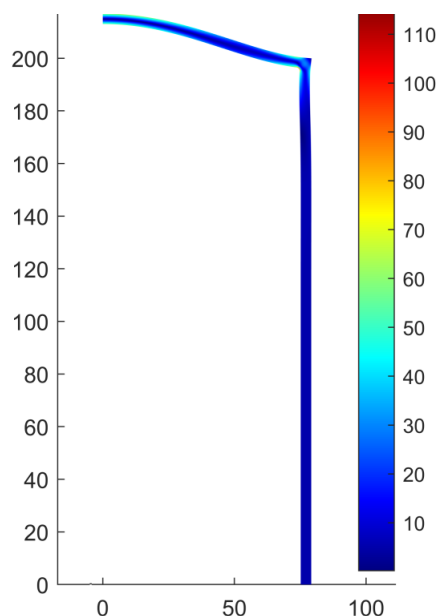
2.6 Tlaková nádoba - 2D

Táto kapitola sa venuje vplyvu zvyšovania pretlaku na veľkosť maximálneho posuvu a napätia v tlakovej nádobe s plochým dnom. Výsledky sú porovnávané s numerickým riešením v ANSYSe s vplyvom veľkých deformácií a bez nich.

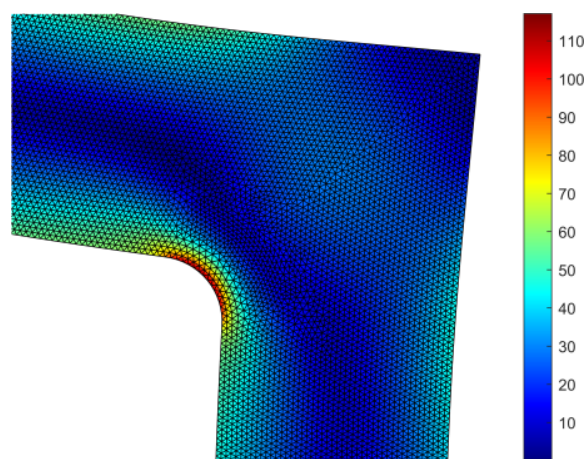
Geometria, zaťaženie a výpočet v PDE Toolboxe:

- Vnútorňý polomer nádoby - $R = 75 \text{ mm}$
- Hrúbka plášťa a dna - $t = 4 \text{ mm}$
- Rádus v prechode dna a plášťa - $r = 1 \text{ mm}$
- Výška - $L = 200 \text{ mm}$
- Vnútorňý pretlak - $p = 0.2 - 7 \text{ MPa}$
- Maximálna veľkosť prvku - $0,1 \text{ mm}$
- Počet uzlov - 512 000
- Čas výpočtu celého cyklu - 610 s

Pri modelovaní je využitá symetria. Na obrázkoch 2.29 a 2.30 je zobrazená sieť a deformovaný stav s redukovaným napätím. Pre limit prvkov v ANSYSe je sieť zjemnená na rovnakú veľkosť len v okolí spojenia dna a plášťa. Na obrázku 2.31 je porovnanie redukovaného napätia v okolí 10 mm od rádiusu pri pretlaku $p = 0.3 \text{ MPa}$. Maximálny posuv dna sa pri tomto zaťažení sa v PDE Toolboxe a ANSYSe zhoduje: $u = 0,17 \text{ mm}$.

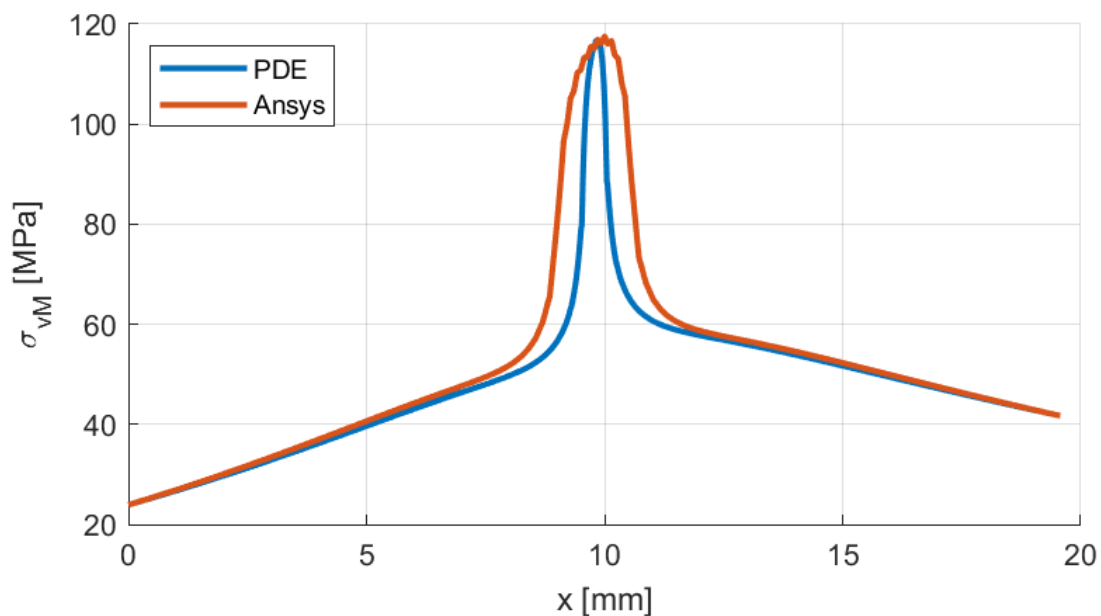


Obr. 2.29: Deformovaný stav, σ_{vM} [MPa]



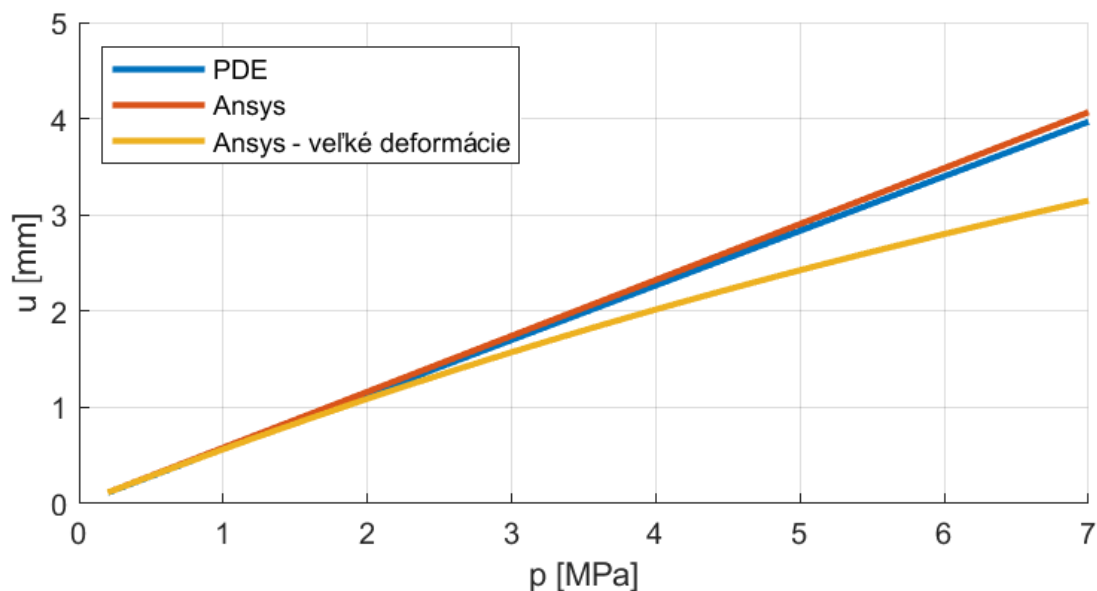
Obr. 2.30: Rádus, σ_{vM} [MPa]

V programe ANSYS prebehli výpočty so zahrnutím veľkých deformácií a bez nich. Závislosť maximálneho posuvu a napätia na zvyšovanie pretlaku je znázornená na obrázkoch 2.32 a 2.33. Zvyšovanie pretlaku sa deformácia stáva porovnateľnou s hrúbkou steny.

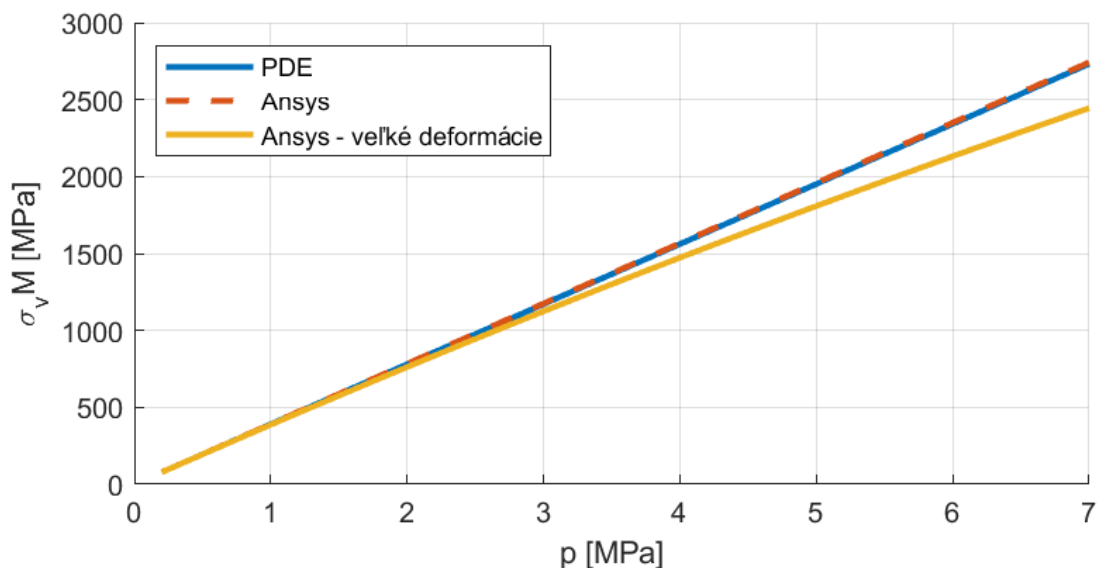


Obr. 2.31: Nádoba - redukované napätie v rádiuse PDE vs ANSYS

Pri dosiahnutí maximálnej deformácie s veľkosťou približne $\frac{1}{2}$ hrúbky steny nádoby, začnú mať veľké deformácie výrazný vplyv na výsledky. PDE Toolbox s touto nelinearitou (zmena matice tuhosti v priebehu výpočtu) nedokáže počítať a pri veľkých deformáciách sa stáva výraznou.



Obr. 2.32: Nádoba v 2D - maximálny posuv v závislosti na tlaku



Obr. 2.33: Nádoba v 2D - maximálne redukované napätie v závislosti na tlaku

2.7 Tlaková nádoba - 3D

V tejto kapitole sú porovnané výsledky napäťovej analýzy tlakovej nádoby s hrdlom z PDE Toolboxu a ANSYSu v 3D. Uvažujú sa dve rôzne zaťaženia. Vnútorý pretlak s posuvom hrdla a bez posuvu.

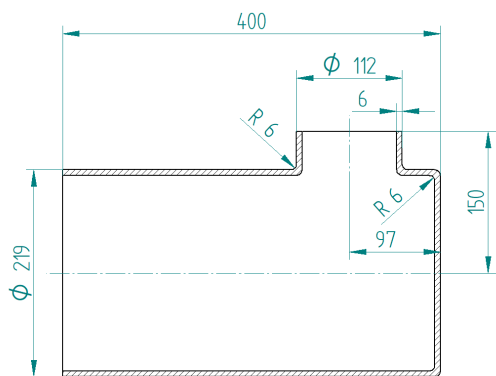
Model v PDE Toolboxe neumožňuje zamedziť radiálnemu posuvu, iba posuvom v smere súradnicového systému. Z tohoto dôvodu je na celej spodnej ploche plášťa zamedzené všetkým posuvom.

Geometria, zaťaženie a výpočet v PDE Toolboxe:

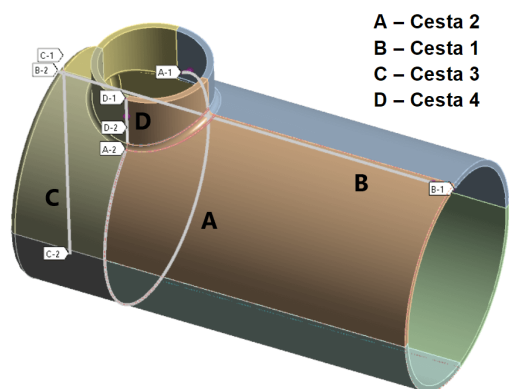
- Rozmery sú uvedené na obrázku 2.34
- Vnútorý pretlak - $p = 1 \text{ MPa}$
- Maximálna veľkosť prvku - $0,1 \text{ mm}$
- Počet uzlov - 830 000
- Čas výpočtu - 440 s

V takto veľkom modeli je možné vytvoriť sieť s maximálne dvoma prvkami po priereze - obrázok 2.36. Časť výpočtu sa nezmestila do pamäte RAM a zapisovala sa na pevný disk, čo predlžuje výpočet.

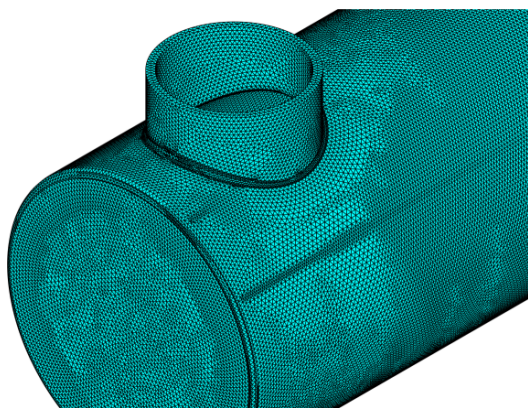
Deformovaný stav a redukované napätie je na obrázku 2.37. Zvolené cesty pre vyhodnotenie redukovaného napätia sú znázorené v ANSYS-e - obrázok 2.35. Cesty A a D sú vedené po vonkajšej strane plášťa, cesty B a C po vnútornej. Výsledné napätia sú porovnané s ANSYSom na obrázku 2.39. V okolí hrdla je v PDE Toolboxe veľký zákmit napätia. V ostatných miestach sa výsledky zhodujú.



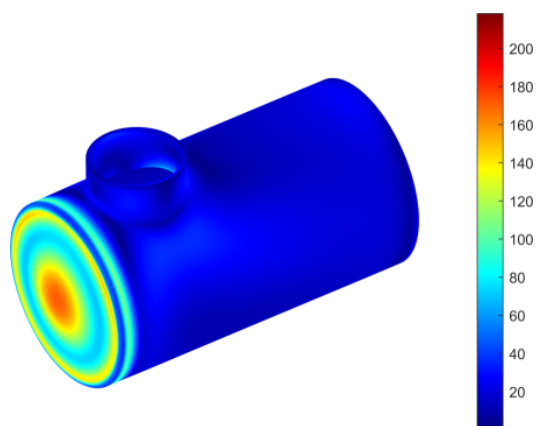
Obr. 2.34: Geometria nádoby



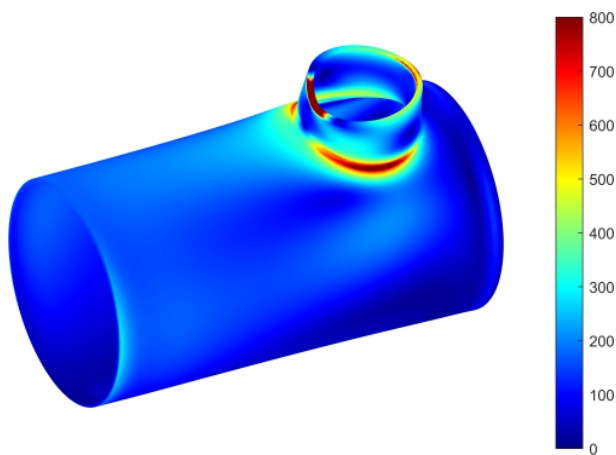
Obr. 2.35: Cesty pre vykreslenie napätia



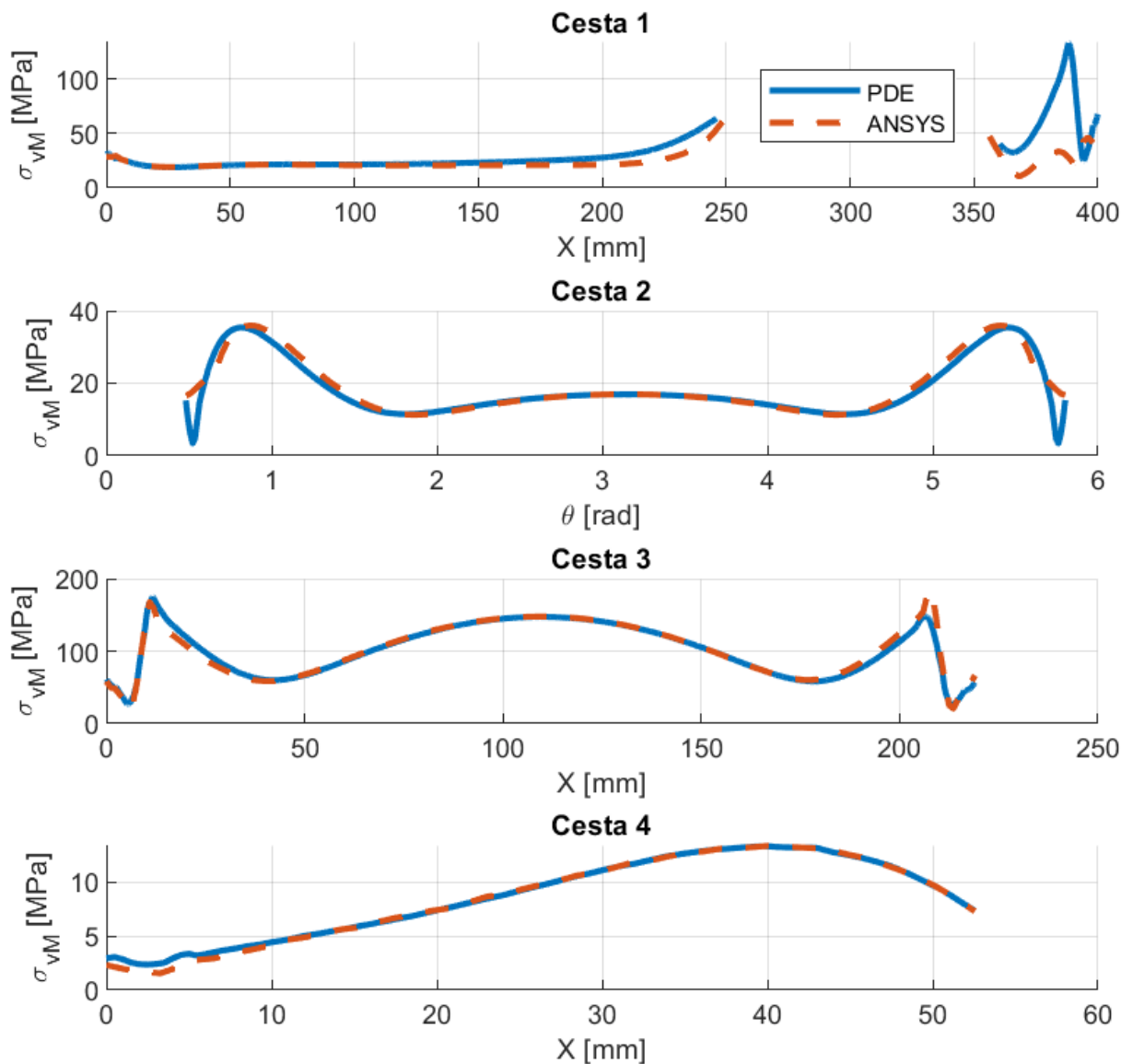
Obr. 2.36: Nádoba - sieť



Obr. 2.37: Zataženie tlakom [MPa]



Obr. 2.38: Zataženie tlakom a posuvom [MPa]

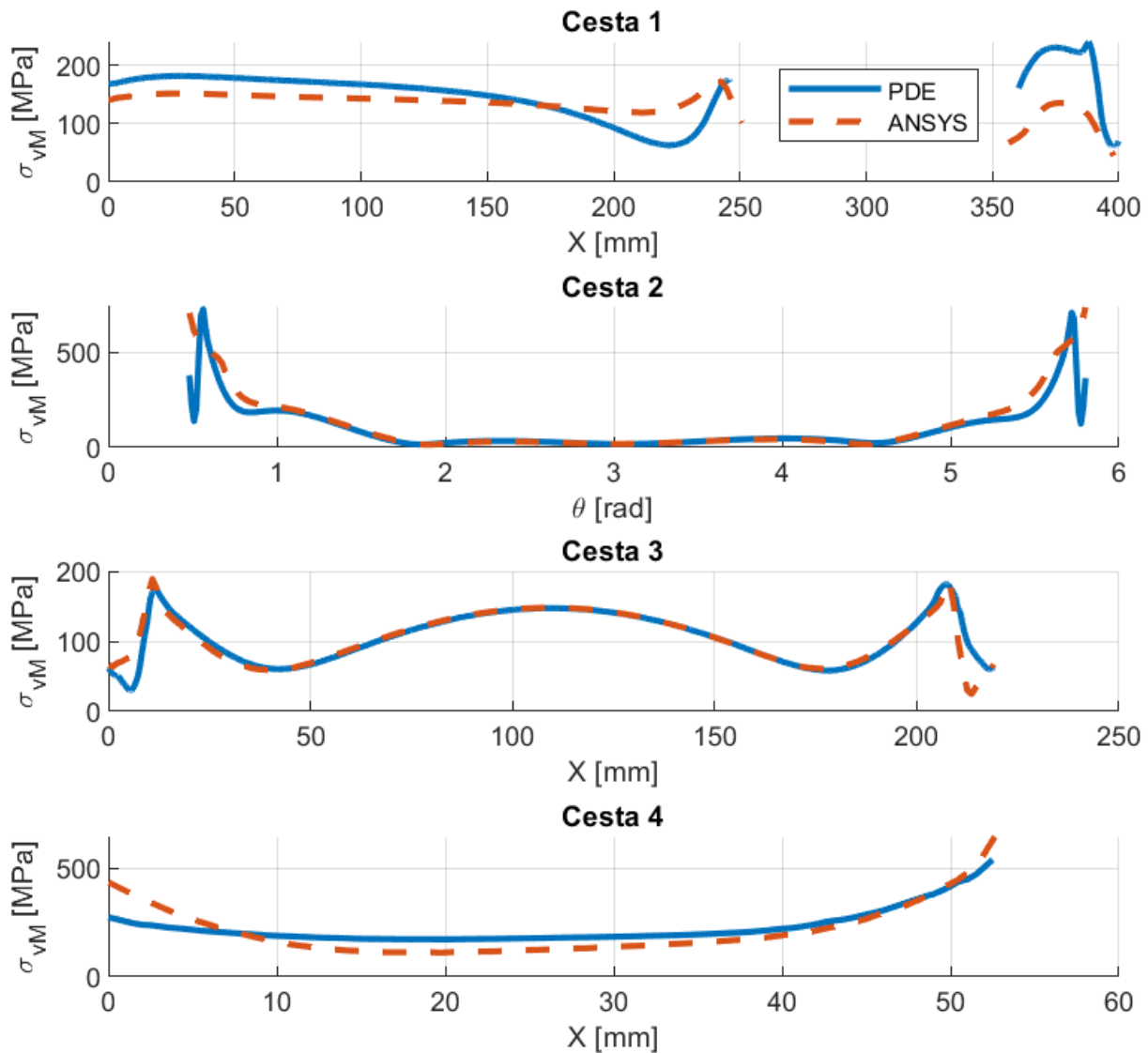


Obr. 2.39: Zataženie tlakom - porovnanie napätia

Druhý spôsob zataženia je rovnakým vnútorným pretlakom a posuvom hrany hrdla o 1 mm v smere kolmom na rez v obrázku 2.34. Okrajové podmienky, sieť, čas výpočtu a cesty pre vyhodnotenie napätia sú rovnaké ako v minulom prípade.

Deformovaný tvar s vykresleným napätím je na obrázku 2.40. Porovnanie výsledkov na vybraných cestách znázorňuje obrázok 2.38. V tomto prípade sa výsledky v okolí hrdla líšia výraznejšie.

Importovaním geometrie vo formáte STL sa zlúčili všetky vnútorné plochy. Tým sa znemožňuje jednoduché zadávanie rôzneho tlaku v hrdle a nádobe, čo môže byť limitujúci faktor v niektorých úlohách.



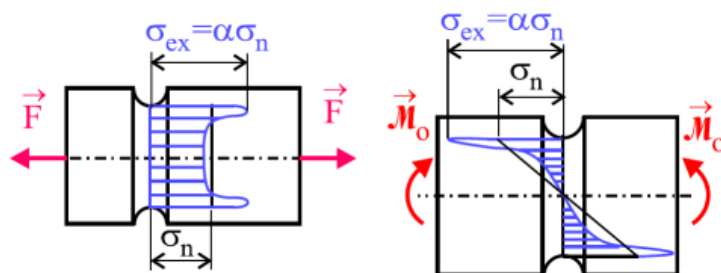
Obr. 2.40: Zataženie tlakom a posuvom

2.8 Nomogramy súčiniteľov koncentrácie napätia

V MKP úlohách je všeobecne problém presne určiť napätie v okolí vrubov, ktoré je navyše veľmi závislé na veľkosti siete. Táto kapitola sa venuje výpočtu štyroch vybraných nomogramov pre súčiniteľ koncentrácie napätia α a porovnaním výsledkom s experimentálne určenými nomogramami.

Súčiniteľ sa všeobecne vypočíta podľa vzťahu 2.30 a jeho význam je znázornený na obrázku 2.41. Všetky nomogramy v tejto kapitole sú prevzaté zo zdrojov [2], [4] a [5].

$$\alpha = \frac{\sigma_{ex}}{\sigma_n} \quad (2.30)$$

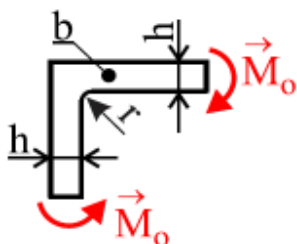


Obr. 2.41: Súčiniteľ koncentrácie napätia [4]

2.8.1 Lomený prút namáhaný ohybom

Táto kapitola sa zaoberá výpočtom nomogramu pre lomený prút s rádiusom, ktorý je namáhaný ohybom. Výsledky z 2D a 3D úlohy sa porovnávajú s nomogramom v zdroji [4]. Taktiež je zisťovaná citlivosť súčiniteľa α na jemnosť siete. Výsledky sú porovnané s výpočtom v ANSYS.

Prút zobrazený na obrázku 2.42 je zaťažovaný silou F na voľnom konci a votknutý na druhom konci. Nominálne napätie sa spočíta podľa rovnice 2.31, kde $M_o = FL$ a L je vzdialenosť medzi silou a miestom spojenia prútov.



Obr. 2.42: Lomený prút namáhaný ohybom [4]

$$\sigma_n = \frac{6M_o}{bh^2} \quad (2.31)$$

Geometria prútu a zaťaženie:

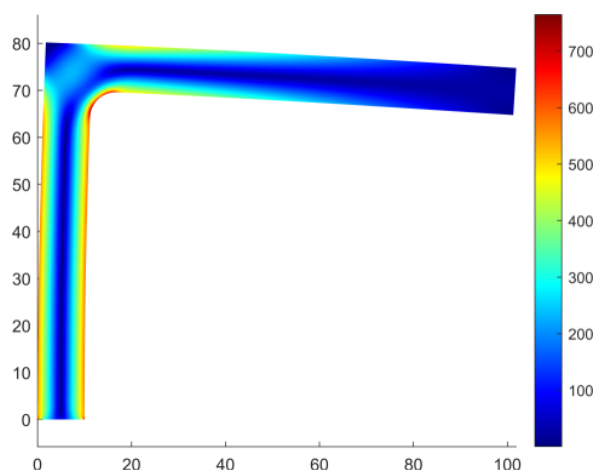
- Výška - $H = 100 \text{ mm}$
- Dĺžka - $L = 80 \text{ mm}$
- Šírka - $h = 10 \text{ mm}$
- Sila na voľnom konci - $F = 100 \text{ N}$

Výpočet v PDE Toolboxe v 2D:

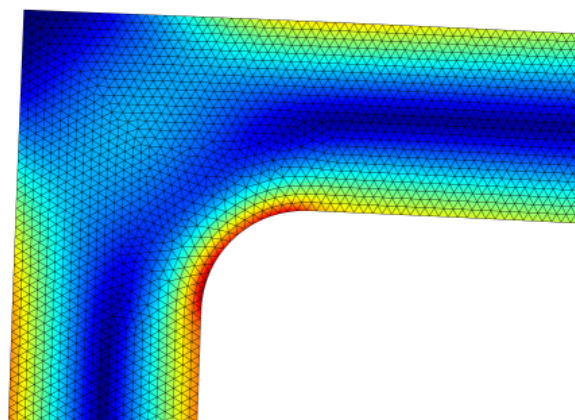
- Maximálna veľkosť prvku - 0,2 až 0,9 mm
- Počet uzlov - 200 000 až 11 000
- Čas výpočtu celého cyklu - 550 s

V PDE Toolboxe je vytvorená parametrická 2D geometria. Šírka nosníkov h je pevne daná a premennou je rádius R . Úloha je nastavená ako rovinná napätosť. V ANSYSe je v okolí rádiusov sieť zjemnená na veľkosť $0,1\text{ mm}$. Ukážka siete s veľkosťou prvku $0,5\text{ mm}$ je na obrázku 2.44. Deformovaný stav a redukované napätie zobrazuje obrázok 2.43.

Vplyv veľkosti siete na hodnotu súčiniteľa je na grafe 2.45. Veľkosť prvku siete má obrovský vplyv pri malom pomere $\frac{R}{h}$. Pri hrubej sieti malý rádius opisuje nízky počet prvkov na presné určenie napätia. PDE Toolbox aj ANSYS určovali menšie napätie vo všetkých prípadoch.



Obr. 2.43: Lomený prút - σ_{vM} [MPa]



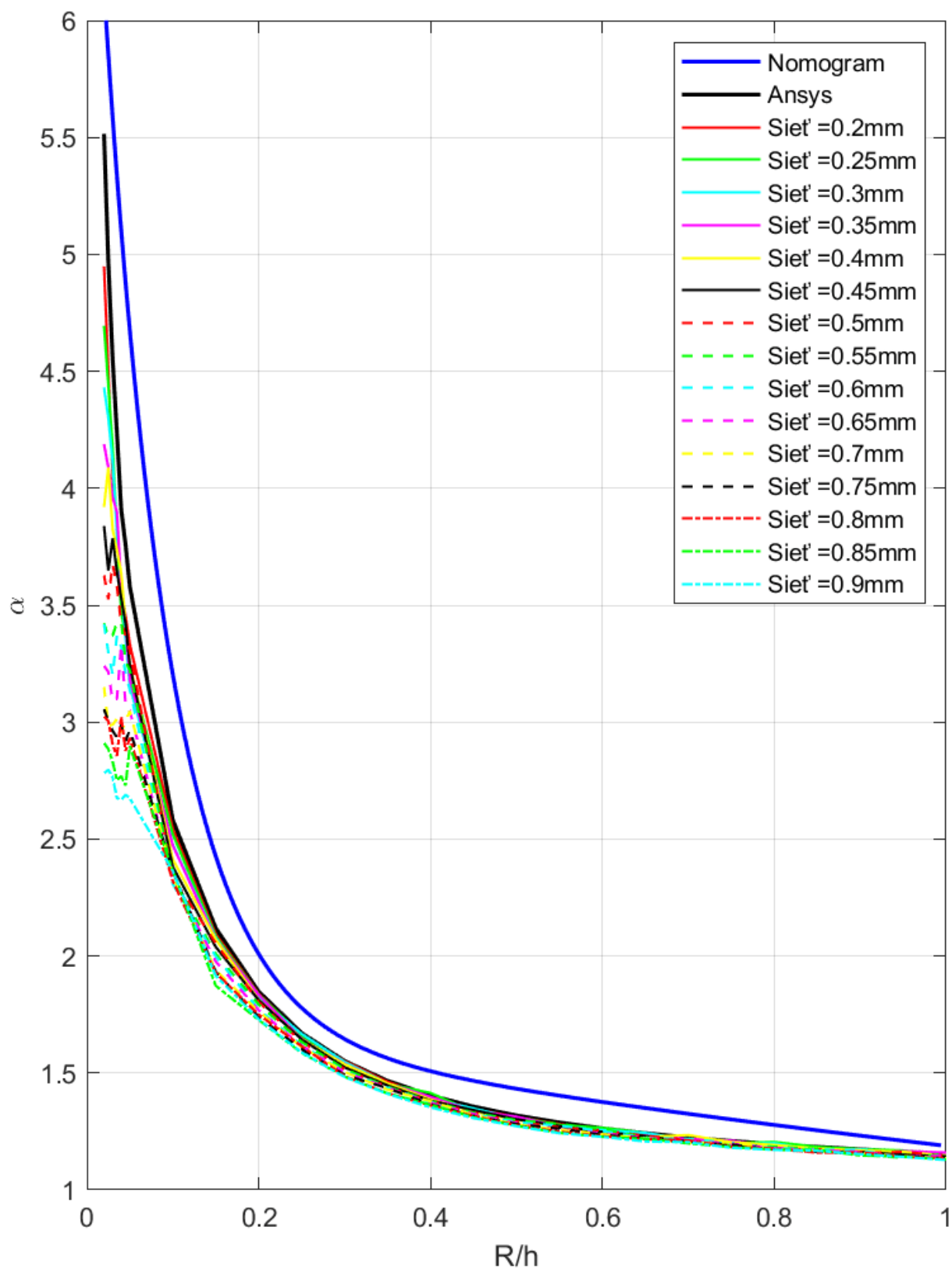
Obr. 2.44: Lomený prút - sieť $0,5\text{ mm}$

Výpočet v PDE Toolboxe v 3D pre dve siete

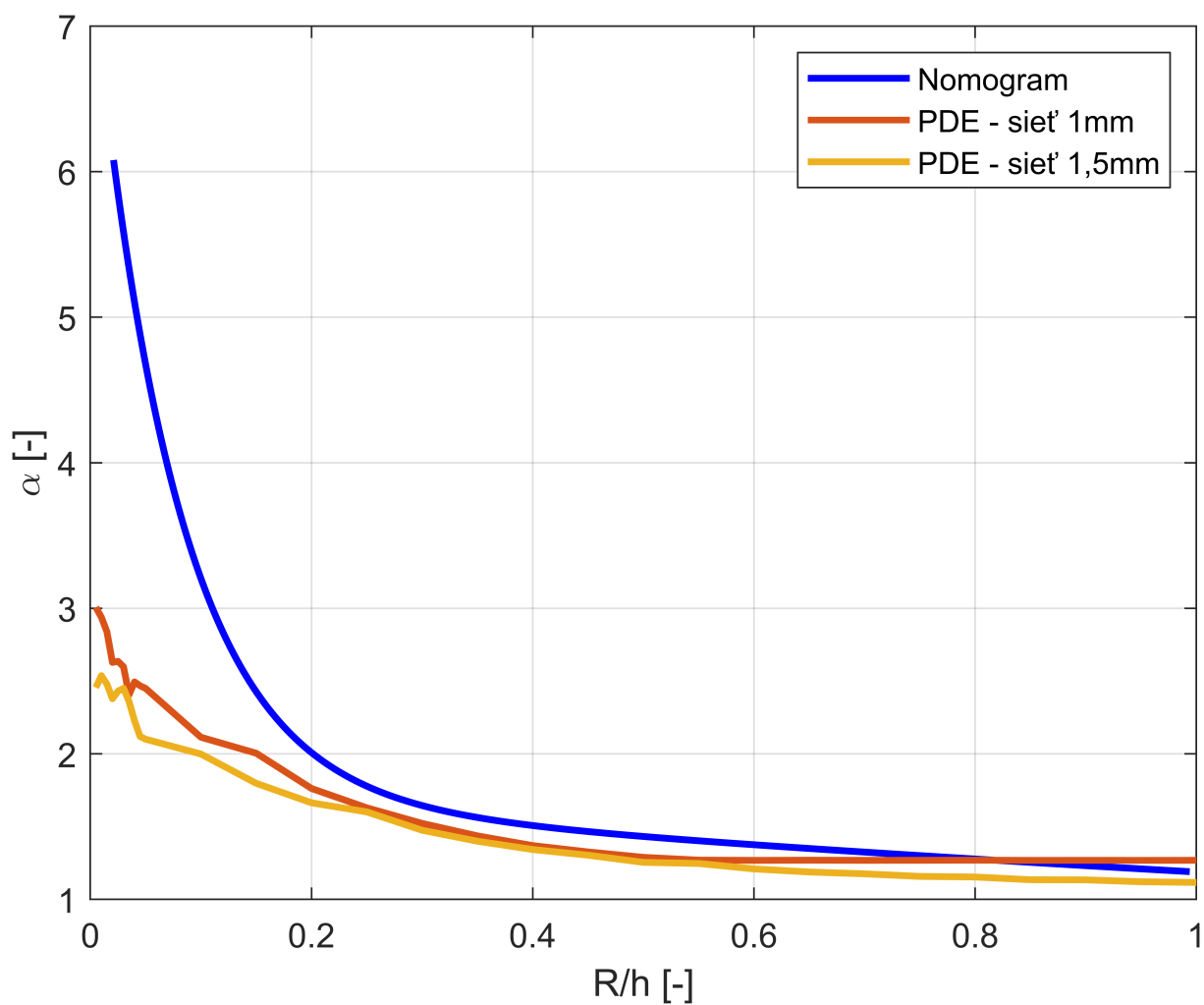
- Maximálna veľkosť prvku - 1 a $1,5\text{ mm}$
- Počet uzlov - $212\ 000$ až $66\ 000$
- Čas výpočtu celého cyklu - 1650 s a 310 s

Rovnaká úloha riešená v 3D. Vytvorená rovnaká 2D parametrická geometria pomocou *polyshape*. Táto geometria nejde priamo vytiahnuť do priestoru. Je potrebné ju najskôr vložiť do pomocného 2D modelu a v ňom použiť príkaz *extrude*. Následne geometriu exportovať do 3D modelu. Nejde použiť pomocný model, lebo je nastavený ako 2D.

Výpočet prebehol len pre dve siete. Jemnejšiu sieť ako 1 mm Toolbox vytvorí ale nepočíta (nezmestí sa do pamäte). Výsledky sú na obrázku 2.46. Hodnoty súčiniteľa pri rovnakej sieti sú presnejšie v porovnaní s výsledkami z 2D analýzy.



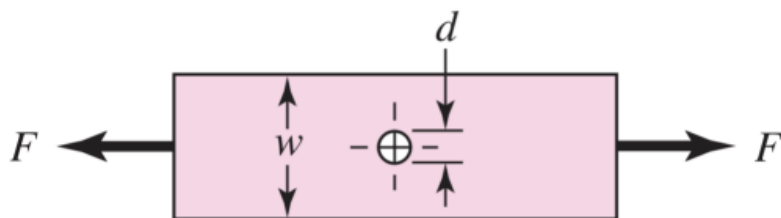
Obr. 2.45: Lomený prút 2D - α - vplyv veľkosti prvku



Obr. 2.46: Lomený prút 3D - α - vplyv veľkosti prvku

2.8.2 Plochý prút s priečnym otvorom namáhaný ťahom

Prút na obrázku 2.47 je zaťažovaný silou F na oboch koncoch. Nominálne napätie sa spočíta podľa rovnice 2.32. V tejto úlohe sa sleduje vplyv veľkosti prvku na hodnotu súčiniteľa α a porovnáva sa s nomogramom v zdroji [5].



Obr. 2.47: Prút s otvorom namáhaný ťahom [5]

$$\sigma_n = \frac{F}{(w - d)t} \quad (2.32)$$

Geometria prútu a zaťaženie:

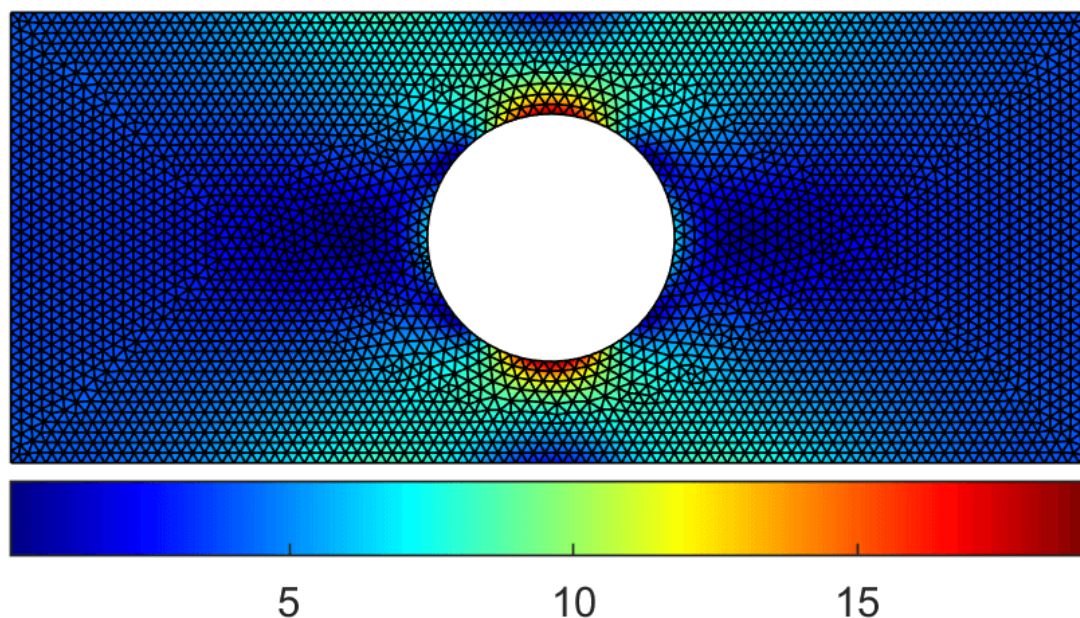
- Výška - $w = 25 \text{ mm}$
- Dĺžka - $L = 60 \text{ mm}$
- Priemer d je dopočítaný podľa nomogramu
- Sila - $F = 100 \text{ N}$

Výpočet v PDE Toolboxe:

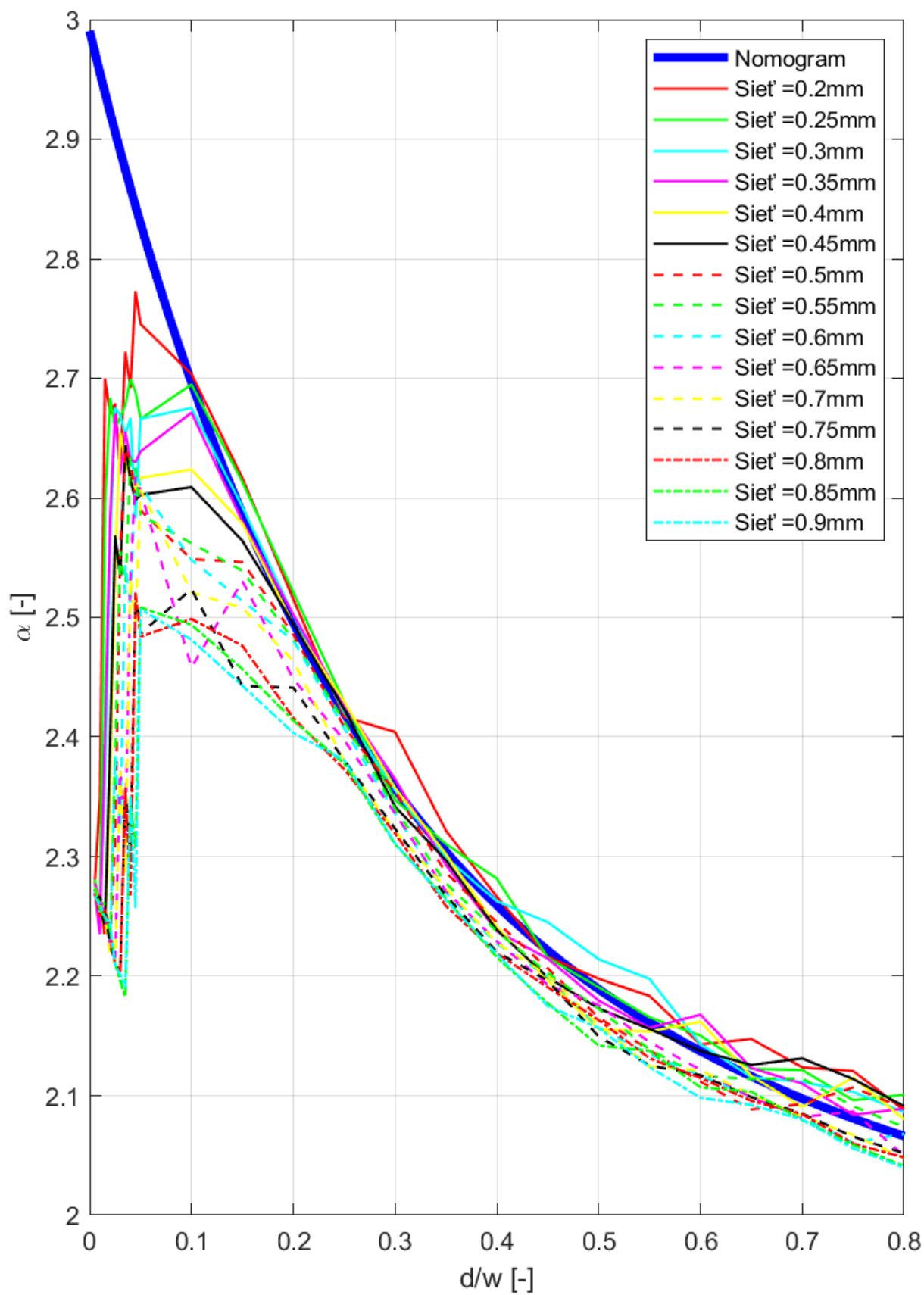
- Maximálna veľkosť prvku - 0,2 až 0,9 mm
- Počet uzlov - 172 000 až 9 000
- Čas výpočtu celého cyklu - 510 s

Parametrická geometria je vytvorená cez príkaz *polyshape* a to pomocou Boolovských operácií (odčítanie kruhu od obdĺžnika). Šírka w je pevne zvolená, priemer otvoru d je premenný. Úloha je nastavená ako rovinná napätosť. Na jednej hrane pôsobí sila F a protiľahlá hrana má zamedzené všetky posuvy.

Príklad siete s veľkosťou prvku 0,65 mm je na obrázku 2.48. Výsledný diagram v závislosti na veľkosti prvku je na obrázku 2.49. Podobne ako v minulej úlohe, sieť má obrovský vplyv na veľkosť súčiniteľa. Pri malom pomere $\frac{d}{w}$ otvor opisuje malý počet prvkov pre správne vyhodnotenie napätia.



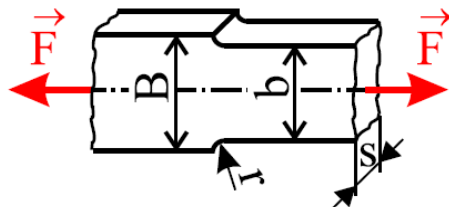
Obr. 2.48: Prút s otvorom - geometria a sieť



Obr. 2.49: Prút s otvorom - α - vplyv siete

2.8.3 Plochý prút s odsadením namáhaný ťahom

Prút na obrázku 2.50 je zaťažovaný silou F na oboch koncoch. Nominálne napätie sa počíta podľa rovnice 2.33. Vypočítaný nomogram pre súčiniteľ α sa porovnáva s nomogramom v zdroji [4].



Obr. 2.50: Prút s odsadením namáhaný ťahom [5]

$$\sigma_n = \frac{F}{bs} \quad (2.33)$$

Geometria prútu a zaťaženie:

- Výška - $b = 20 \text{ mm}$
- Dĺžka - $L = 60 \text{ mm}$
- Ostatné rozmery sú dopyčítané podľa nomogramu
- Sila - $F = 100 \text{ N}$

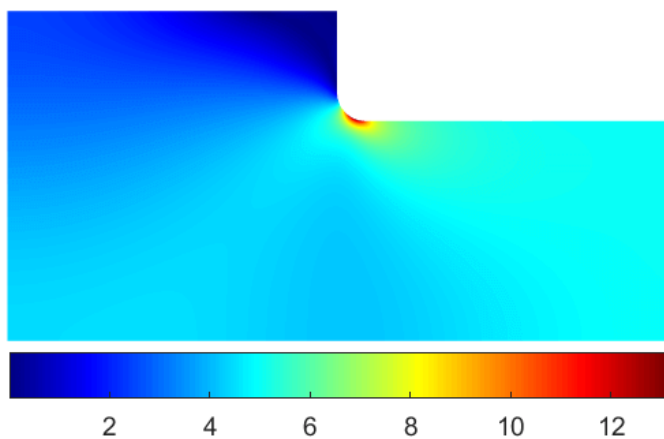
Výpočet v PDE Toolboxe:

- Maximálna veľkosť prvku - $0,2 \text{ mm}$
- Počet uzlov - $150\,000$
- Čas výpočtu - 220 s

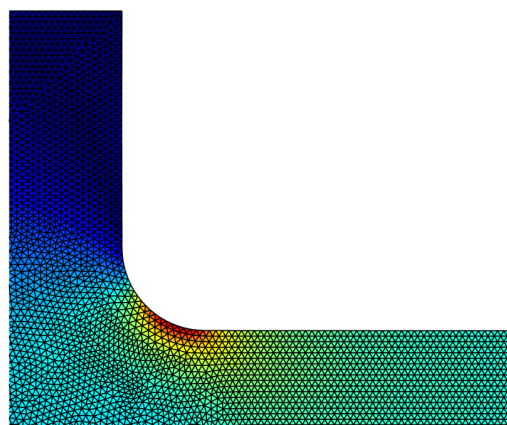
Parametrický 2D model je vytvorený cez *polyshape*. Pri použití Boolovských operácií sa v každom cykle výpočtu prečíslovalo poradie hrán a uzlov. To znamená, že nie je možné zadať okrajové podmienky podľa ich označenia. Problém by šlo vyriešiť pomocou funkcie na hľadanie najbližšej hrany z nejakého bodu. Je využitá osová symetria úlohy. Na dlhšej hrane prútu sú nastavené nulové posuvy a na kratšej pôsobí líniová sila. Na osi symetrie je zabránené posuvu v smere y . Bol testovaný varianta bez využitia symetrie s totožnými výsledkami.

Rozmer b je pevne zvolený, r a B sú premenné. Prípady kedy rádius splňuje podmienku $r > \frac{B-b}{2}$ sú vyradené s výpočtového cyklu. Sú to konfigurácie kedy je rádius väčší ako dĺžka hrany. Úloha je nastavená ako rovinná napätosť.

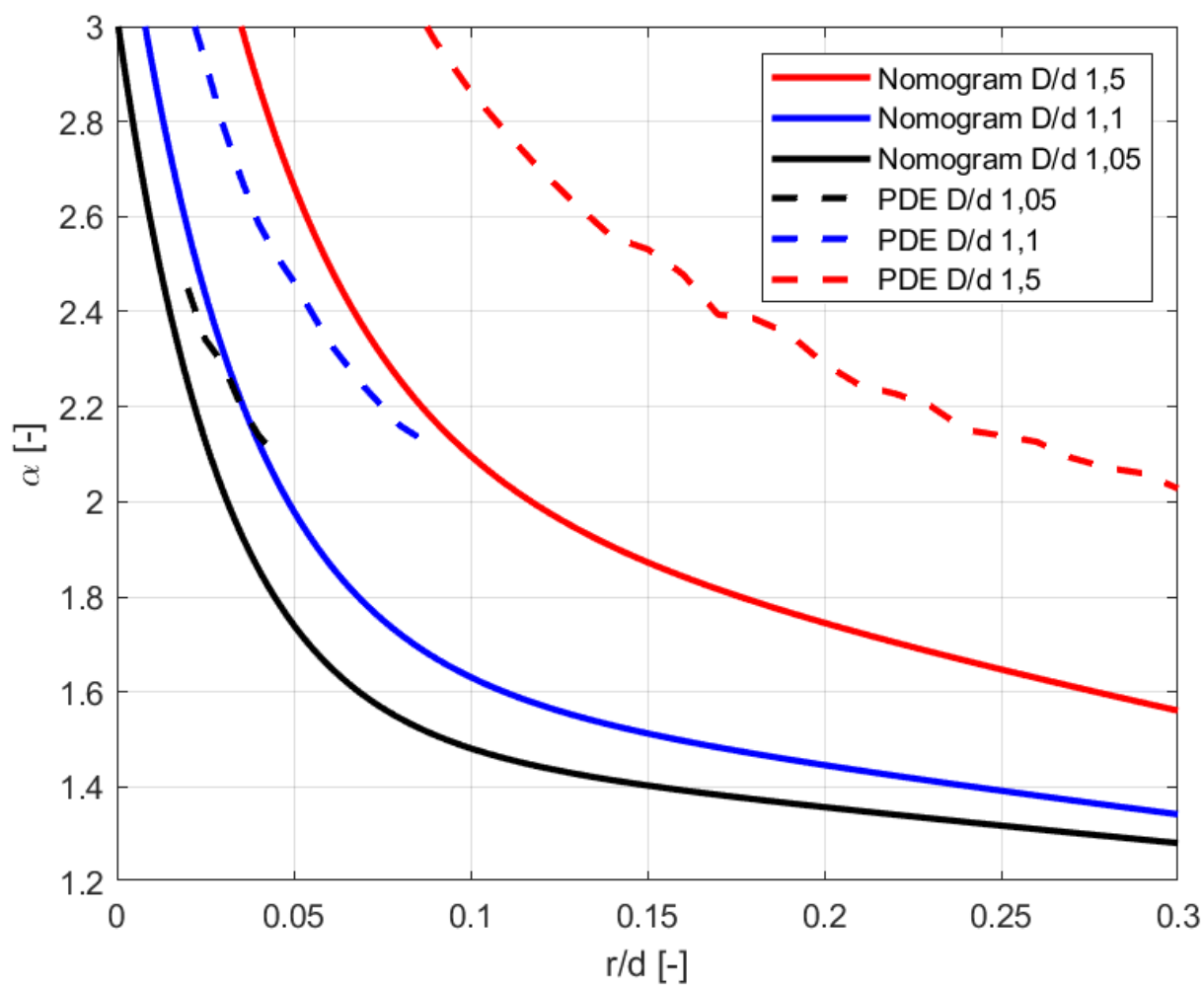
Obrázok 2.51 ukazuje geometriu. Detail na okolie vrubu je na obrázku 2.52. Výsledky sú na obrázku 2.53. V tomto prípade v koncentrátore vnikalo výrazne vyššie napätie ako určuje nomogram. Platilo to aj pri testovaní výpočtu na hrubšej sieti.



Obr. 2.51: Prút s odsadením - napätie [MPa]



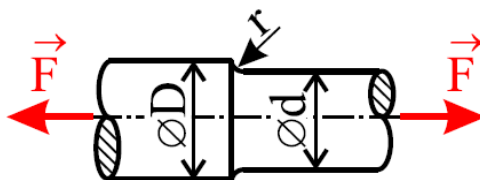
Obr. 2.52: Detail na sieť



Obr. 2.53: Prút s odsadením namáhaný ťahom - α

2.8.4 Kruhov tyč s odsadením namáhaná ťahom

Kruhov tyč s odsadením - obrázok 2.54 je zaťažený silou F na oboch koncoch. Nominlne napätie sa spočíta podľa rovnice 2.34. Vypočtný nomogram pre súčiniteľ α sa porovnáva s nomogramom v zdroji [4].



Obr. 2.54: Tyč s odsadením namáhaná ťahom [5]

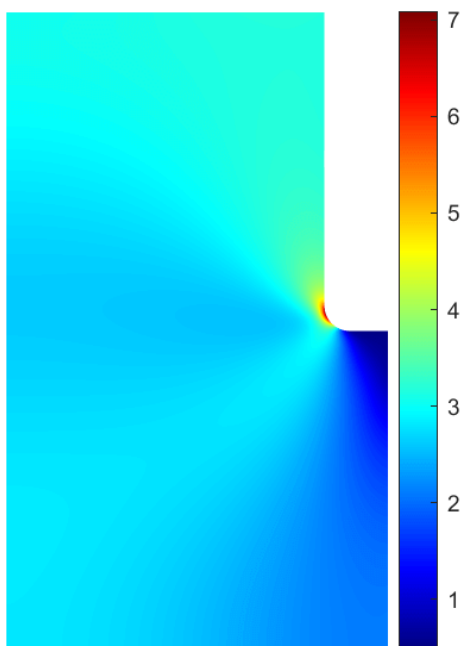
$$\sigma_n = \frac{4F}{\pi d^2} \quad (2.34)$$

Geometria, zaťaženie a výpočet v PDE Toolboxe:

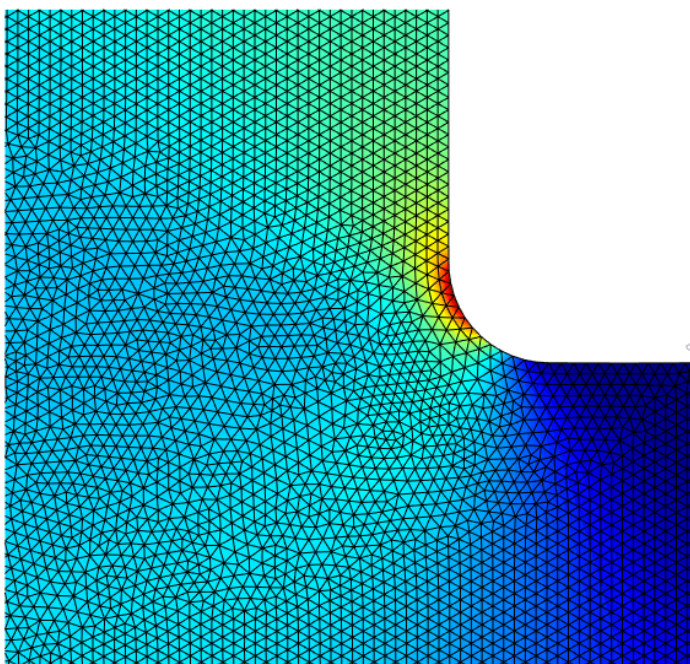
- Priemer - $d = 10 \text{ mm}$
- Dĺžka - $L = 20 \text{ mm}$
- Ostatné rozmery sú dypočtné podľa nomogramu
- Sila - $F = 1000 \text{ N}$
- Maximálna veľkosť prvku - $0,1 \text{ mm}$
- Počet uzlov - 93 000
- Čas výpočtu - 1710 s

Priemer d je pevne zvolený, r a D sú premenné. Prípady kedy rádius splňa podmienku $r > \frac{D-d}{2}$ sú vyradené z výpočtového cyklu (rádius je väčší ako je dĺžka hrany). Pri úlohe je využit rotačná symetria. Na väčšom priemery sú zamedzené posuvy a na menšom pôsobí sila.

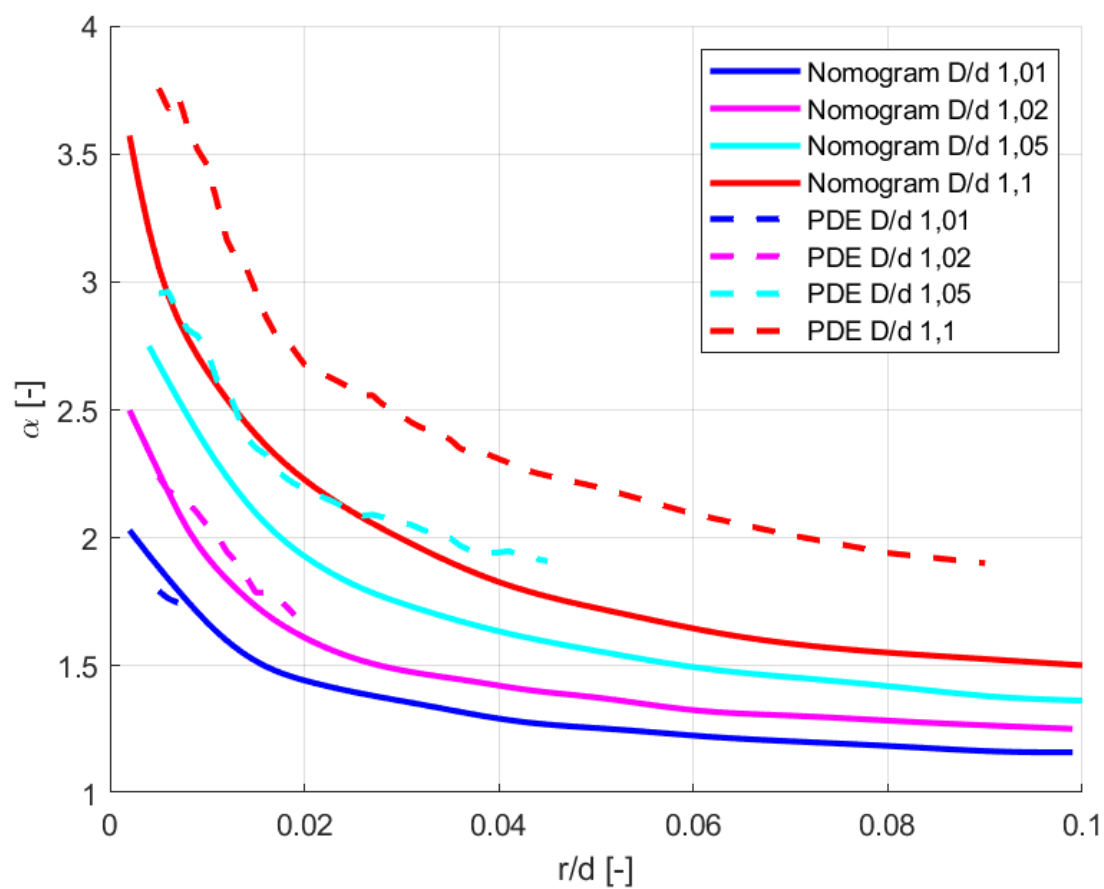
Obrázok 2.55 znzoruňuje geometriu a na obrázku 2.56 je detail na sieť v mieste vrubu. Výsledky pre $\frac{D}{d} \leq 1,1$ sú na obrázku 2.57 a pre $\frac{D}{d} > 1,1$ na obrázku 2.58. Typ vrubu je rovnaký ako v minulej úlohe ale výsledky sú v lepšej zhode s monogramom.



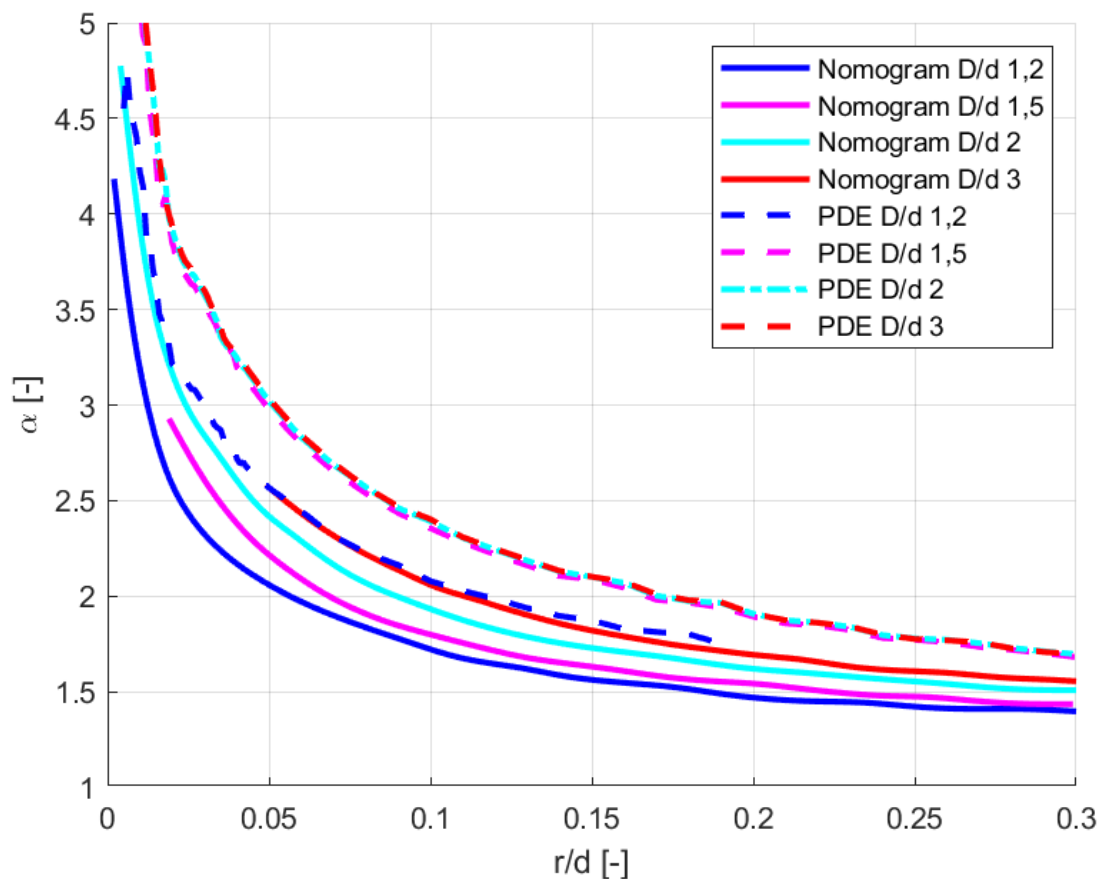
Obr. 2.55: Tyč-napätie[MPa]



Obr. 2.56: Tyč s odsadením - detail na sieť



Obr. 2.57: Tyč s odsadením namáhaný ťahom I - α



Obr. 2.58: Tyč s odsadením namáhaný ťahom II - α

2.9 Ohrevné teleso

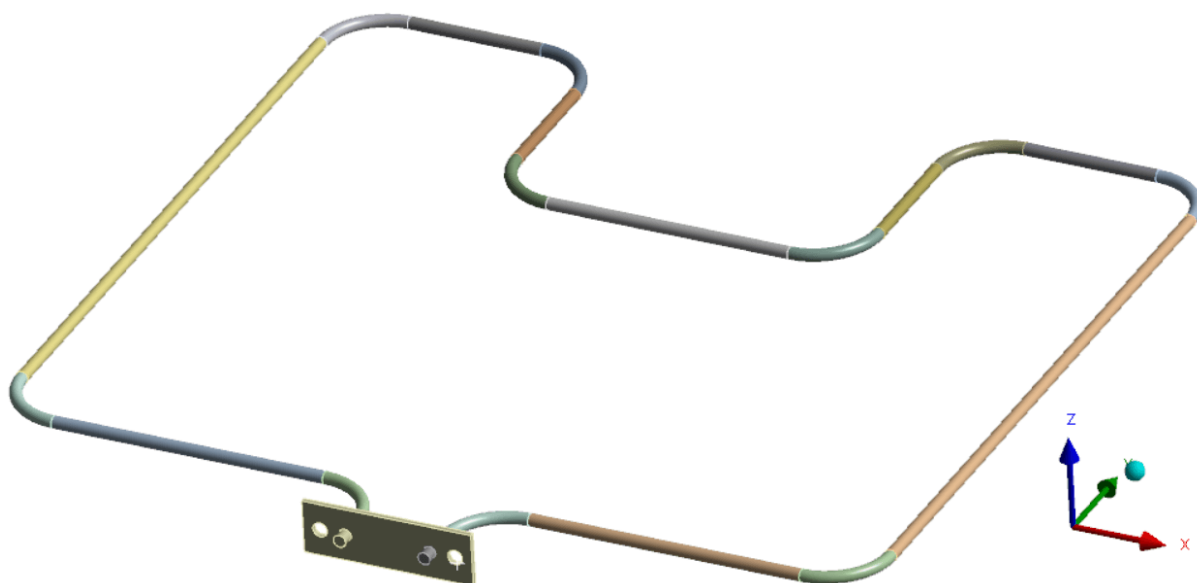
Výpočet napätosti a maximálneho posuvu ohrevného telesa zaťaženie teplotným namáhaním. Teleso je zobrazené na obrázku 2.59. Úloha sa z veľkej časti venuje práci s geometriou a skúma jej možnosti importovania do PDE Toolboxu.

Niektoré varianty úlohy nebolo možné importovať do PDE Toolboxu skrz chybové hlásenie, že objem nie je uzatvorený. Geometria vytvorená v programe Solid Edge s určitou tvorí uzatvorený objem. Ďalšie chybové hlásenie, ktoré sa niekedy vyskytuje pri importe je, že viac plôch zdieľa rovnakú hranu. Tento problém je možné (niekedy) vyriešiť zmenou geometrie, napríklad pridaním rádiusu. Chybové hlásenie nehovorí nič o mieste, kde je v geometrii problém. Oba problémy sa vyskytli viac krát počas používania PDE Toolboxu a to hlavne pri zložitejších telesách.

Objem nie je možné rozdeliť na dva a predpísať im rôzne materiálové vlastnosti (napríklad rôzne tepelné rozťažnosti). V statickej analýze je možné predpísať teplotu iba celému objemu telesa a nie rôznu teplotu rôznym častiam. Príkaz *addFace* vytvára plochu medzi

hranami a tým rozdelí teleso na dve časti. V mieste spojenia plechu a drôtu tento príkaz nefunguje.

Obrázok 2.61 ukazuje neprehľadnosť vykreslených plôch pre výber okrajových podmienok (aj pri otáčaní kamery problém pretrváva). Je nutné využiť funkciu *nearestFace* pre nájdenie plôch otvorov v blízkosti vytvorených (zelených) bodov. Často sa stáva, že označenie bodov, hrán a plôch je vnútri objemu. Pri zložitejšej geometrii je na obrazovke prakticky vidno len značky plôch a nie je možné ich rozoznať.

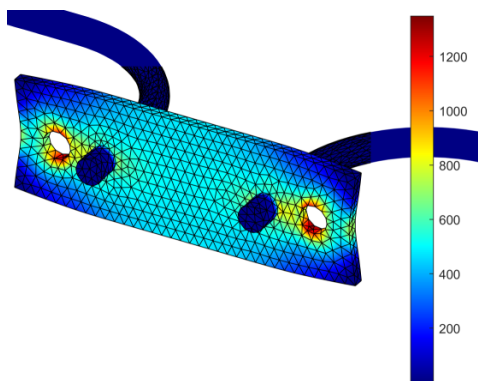


Obr. 2.59: Ohrevné teleso

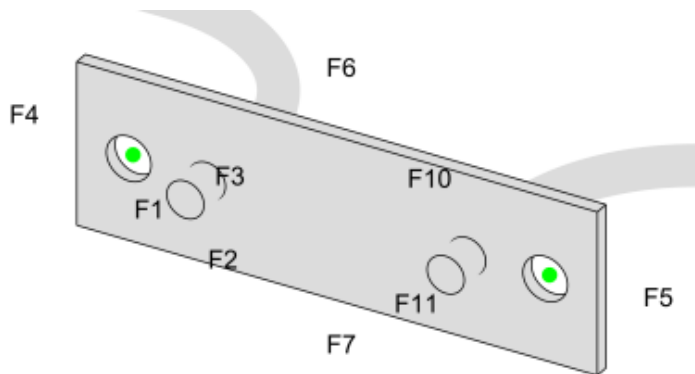
Geometria, zaťaženie a výpočet v PDE Toolboxe:

- Priemer drôtu - $d = 5 \text{ mm}$
- Šírka \times dĺžka drôtu - $360 \times 350 \text{ mm}$
- Teplota modelu - $250 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Referenčná teplota - $25 \text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Maximálna veľkosť prvku - 2 mm
- Počet uzlov - 270 000
- Čas výpočtu - 180 s

OP - v otvoroch zamedzený posuv v smere x a z, na vertikálnej ploche spojovacieho plechu je zamedzený posuv v smere y (plocha F3).

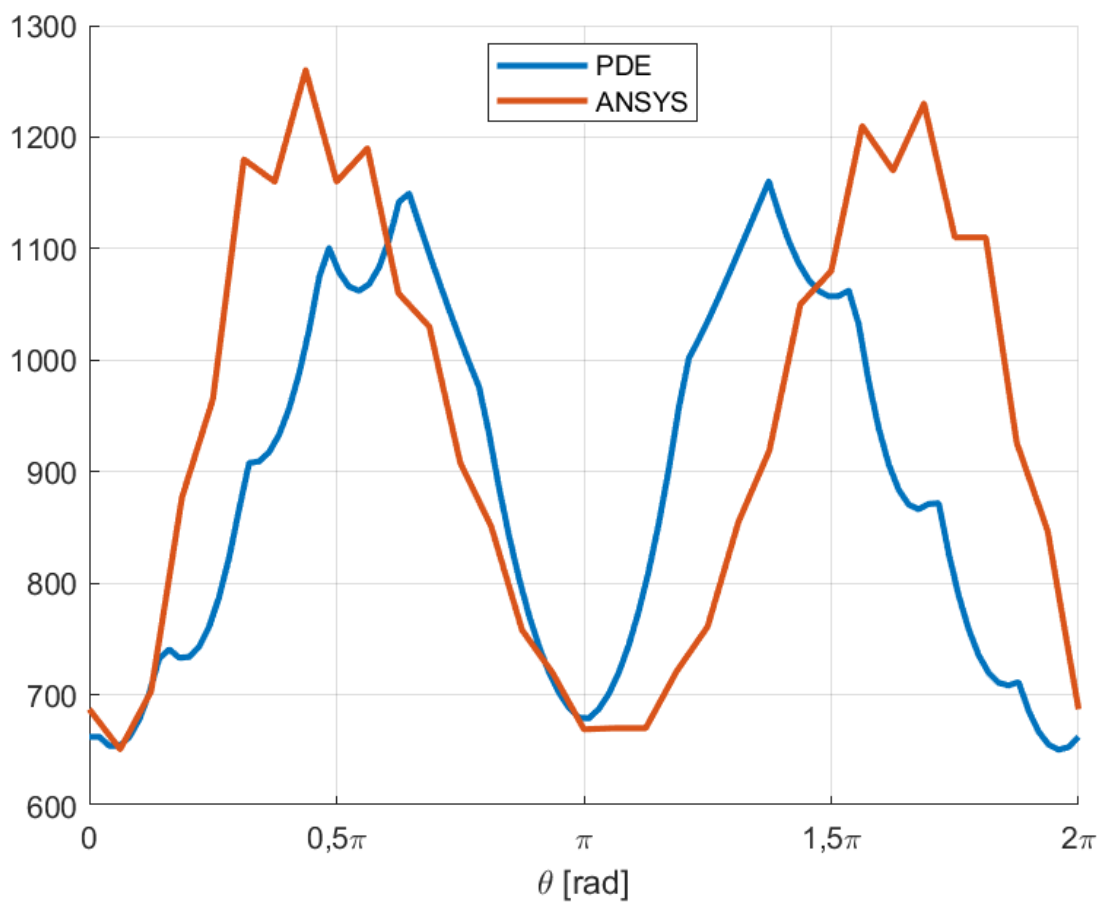


Obr. 2.60: Ohrevné teleso - PDE



Obr. 2.61: Ohrevné teleso - plochy

Sieť a deformovaný stav je na obrázku 2.60. Maximálny posuv drôtu je v PDE Toolboxe $1,04 \text{ mm}$ a v ANSYS-e $1,03 \text{ mm}$. Maximálne napätie je v otvoroch - porovnanie priebehu redukovaného napätia na obrázku 2.62.



Obr. 2.62: Ohrevné teleso - napätie v otvore

3 Modálna analýza

Kapitola obsahuje výpočet vlastných frekvencií a tvarov dvoch úloh. V modálnej analýze nie je možné zadávať silové OP, čo limituje jej použitie. Taktiež nedovoľuje výpočet úloh s tlmením. V modálnej analýze sa nastavuje frekvenčný rozsah v ktorom má hľadať vlastné frekvencie - narozdiel od ANSYSu kde sa nastavuje ich počet. Toto nastavenie je nevýhodné, pretože dopredu sa nevie kde presne tieto frekvencie ležia. Pri počítaní vlastných frekvencií blízkyh nule, je doporučené zadávať minimálnu hodnotu rozsahu ako zápornú.

3.1 Doska

Modálna analýza jednostranne votknutej dosky. Výsledky sú porovnané s programom ANSYS.

Geometria a výpočet v PDE Toolboxe:

- Rozmery - $500 \times 500 \times 50 \text{ mm}$
- Maximálna veľkosť prvku - 25 mm
- Počet uzlov - 10 000
- Čas výpočtu - 30 s

Prvých 6 vlastných tvarov je na obrázku 3.1. Všetky tvary sú totožné s tvarmi v ANSYS-e. Porovnanie výsledkov je v tabuľke 3.1, kde pri počítaní rozdielu je referenčná hodnota z ANSYSu.

PDE Toolbox neobsahuje univerzálnu funkciu pre vykresľovanie a animovanie vlastných tvarov. Animovanie prebieha násobením výsledných deformácií časovo premenným pulzom.

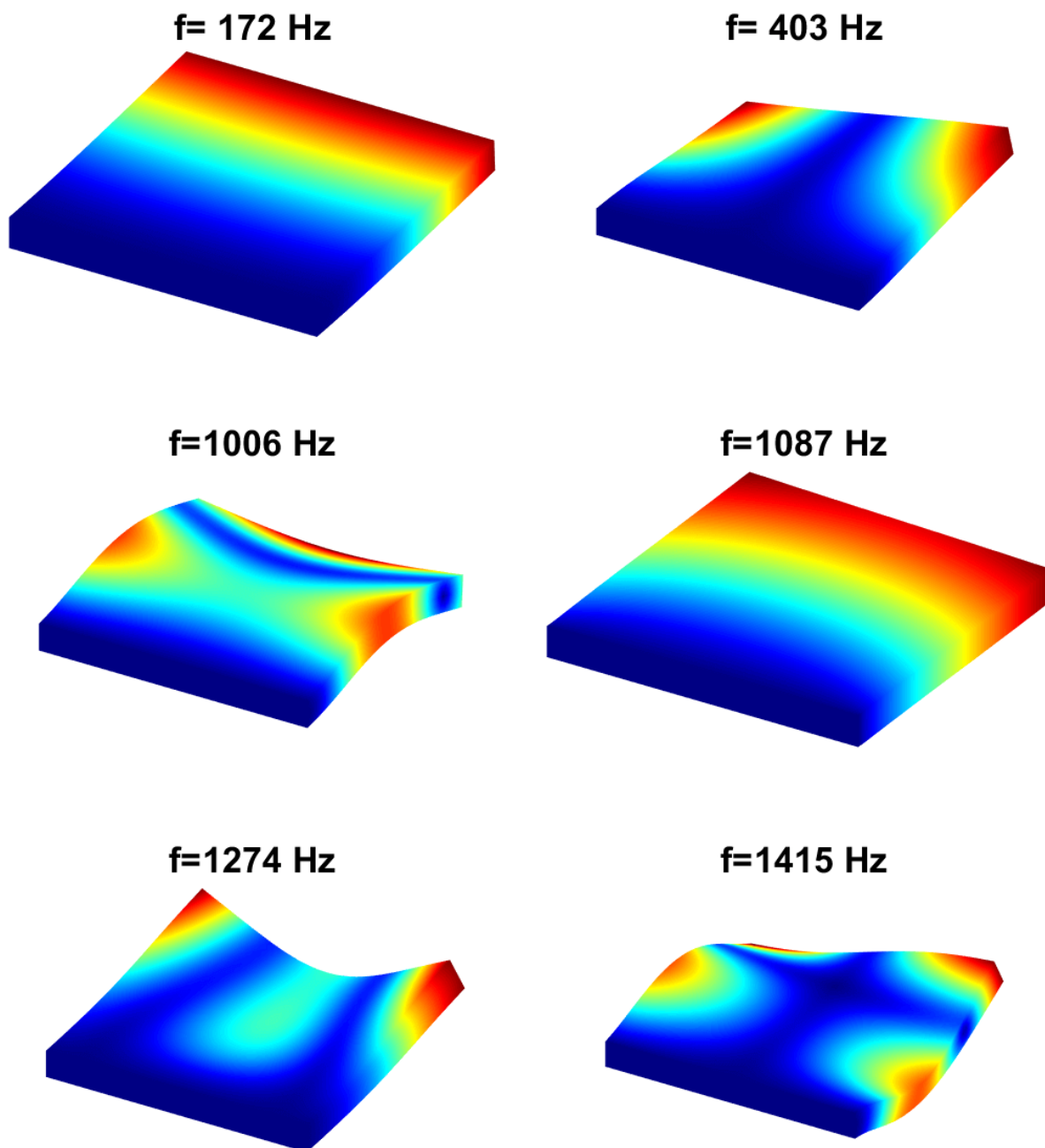
Mód	PDE [Hz]	ANSYS [Hz]	Rozdiel[%]
1	171,6	167,3	2,57
2	403,1	392,8	2,62
3	1006,2	980,4	2,63
4	1086,6	1060,1	2,50
5	1274	1242	2,58
6	1414,8	1377,9	2,68
7	2381,7	2318,9	2,71
8	2606,9	2543,5	2,49
9	2718,1	2646,6	2,70
10	2854,2	2780,9	2,64

Tab. 3.1: Doska - vlastné frekvencie

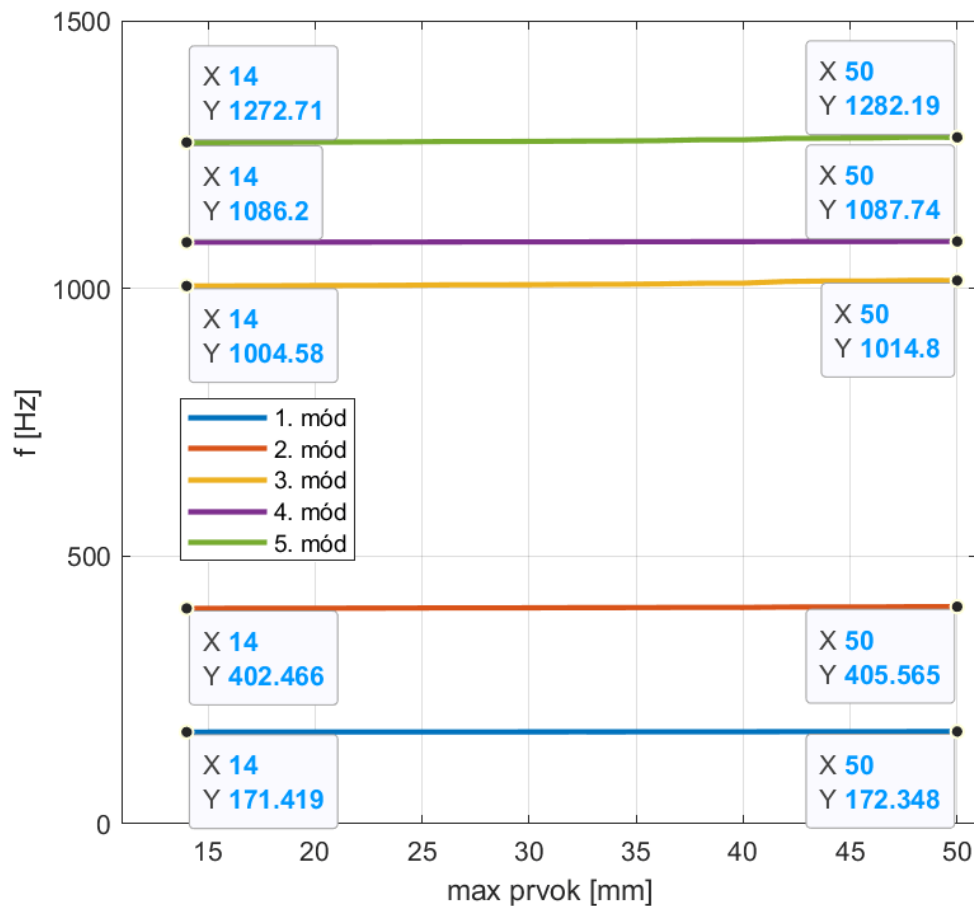
Výpočet v PDE Toolboxe (citlivosť na zmenu siete):

- Maximálna veľkosť prvku - 14 až 50 *mm*
- Počet uzlov - 55 000 až 10 000
- Čas výpočtu celého cyklu - 560 *s*

Pri zmene siete sa vlastné frekvencie prakticky nemenia, ako ukazuje obrázok 3.2.



Obr. 3.1: Doska - vlastné tvary



Obr. 3.2: Doska - vlastné frekvencie v závislosti na veľkosti prvku

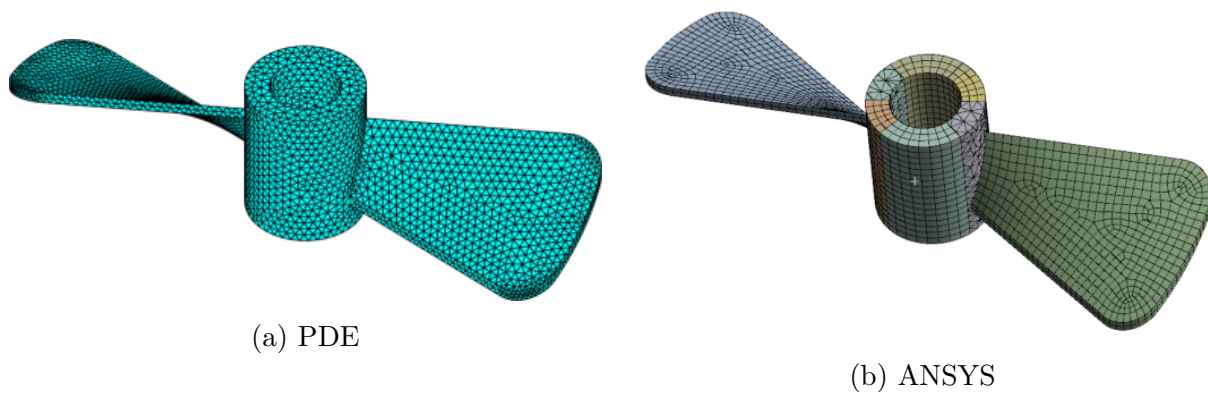
3.2 Vrtuľa

Modálna analýza zjednodušeného modelu vrtule. Výsledky sú porovnané s programom ANSYS.

Základné rozmery a výpočet v PDE Toolboxe:

- Vonkajší priemer $D = 100 \text{ mm}$
- Vnútorný priemer $d = 20 \text{ mm}$
- Výška $h = 25 \text{ mm}$
- Zamedzenie všetkým posuvom na čelnej hrane
- Maximálna veľkosť prvku - $1,5 \text{ mm}$
- Počet uzlov - 32 000
- Čas výpočtu - 70 s

Sieť v PDE a ANSYSu je na obrázku 3.3. Porovnanie výsledkov je v tabuľke 3.2, kde pri počítaní rozdielu je referenčná hodnota z ANSYSu. Zmena siete má malý vplyv na vlastné frekvencie a menia sa maximálne v jednotkách Hz.



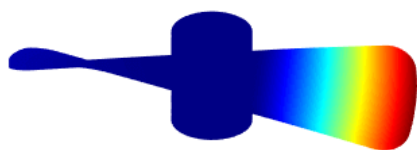
Obr. 3.3: Vrtuľa - sieť

Mód	PDE [Hz]	ANSYS [Hz]	Rozdiel [%]
1	390,9	386,5	1,13
2	393,7	387,1	1,72
3	2146,7	2118,4	1,34
4	2159,6	2120,7	1,83
5	2384,7	2350,4	1,46
6	2389,5	2353,2	1,54
7	6287,4	6203,6	1,35
8	6464,8	6375,9	1,39
9	11313,4	11150,0	1,47
10	11330,2	11164,0	1,49

Tab. 3.2: Vrtuľa - vlastné frekvencie

Prvých 6 vlastných tvarov je na obrázku 3.4.
Všetky tvary sú totožné s tvarmi v ANSYS-e.

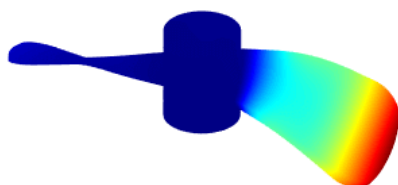
f= 391 Hz



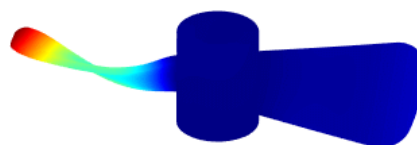
f= 394 Hz



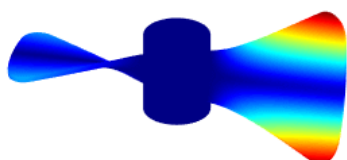
f=2147 Hz



f=2160 Hz



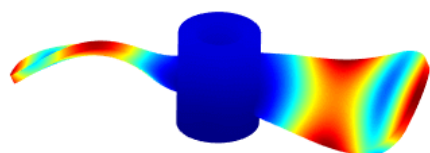
f=2385 Hz



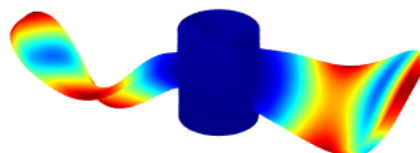
f=2389 Hz



f=6287 Hz



f=6465 Hz



Obr. 3.4: Vrtuľa - vlastné tvary

4 Prechodová analýza

Táto kapitola sa zaoberá prechodovou analýzou a jej obmedzeniami.

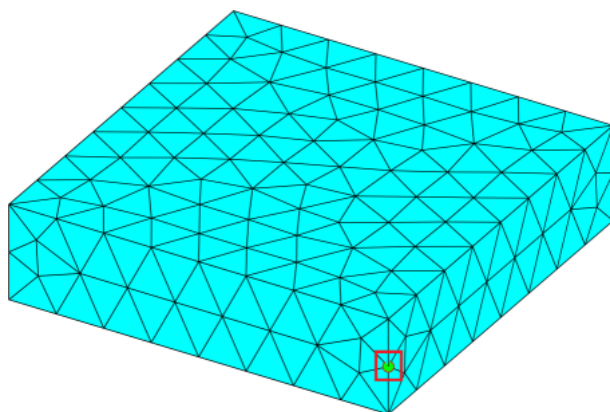
4.1 Doska budená impulzom

Výpočet jednostranne votknutej dosky budenej krátkym impulzom. Výsledky s tlmením a bez tlmenia sú porovnané s programom ANSYS.

Geometria, zaťaženie a výpočet v PDE Toolboxe bez tlmenia:

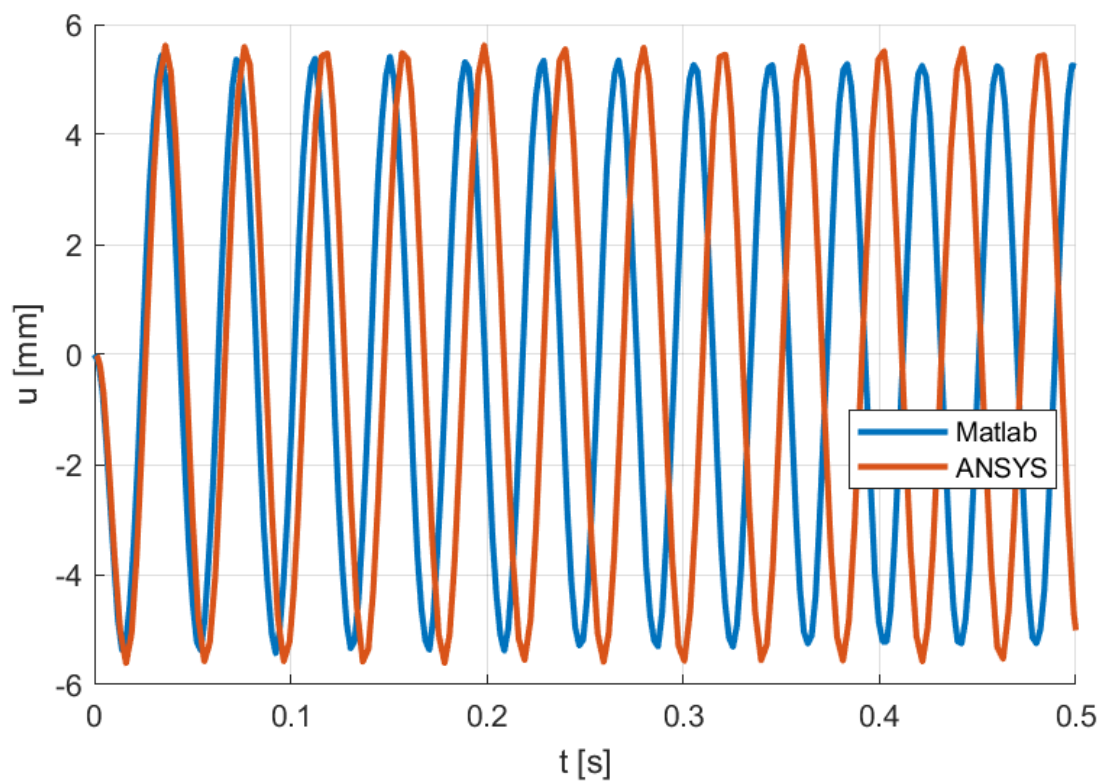
- Rozmery - $8 \times 8 \times 2 \text{ m}$
- Zaťaženie tlakovým pulzom 1 MPa na väčšiu hranu po dobu $0,01 \text{ s}$
- Doba simulácia - $0,5 \text{ s}$ s časovým krokom $0,002 \text{ s}$
- Maximálna veľkosť prvku - 1 m
- Počet uzlov - 1 800
- Čas výpočtu - 410 s

Sieť v PDE Toolboxe je na obrázku obrázku 4.1.

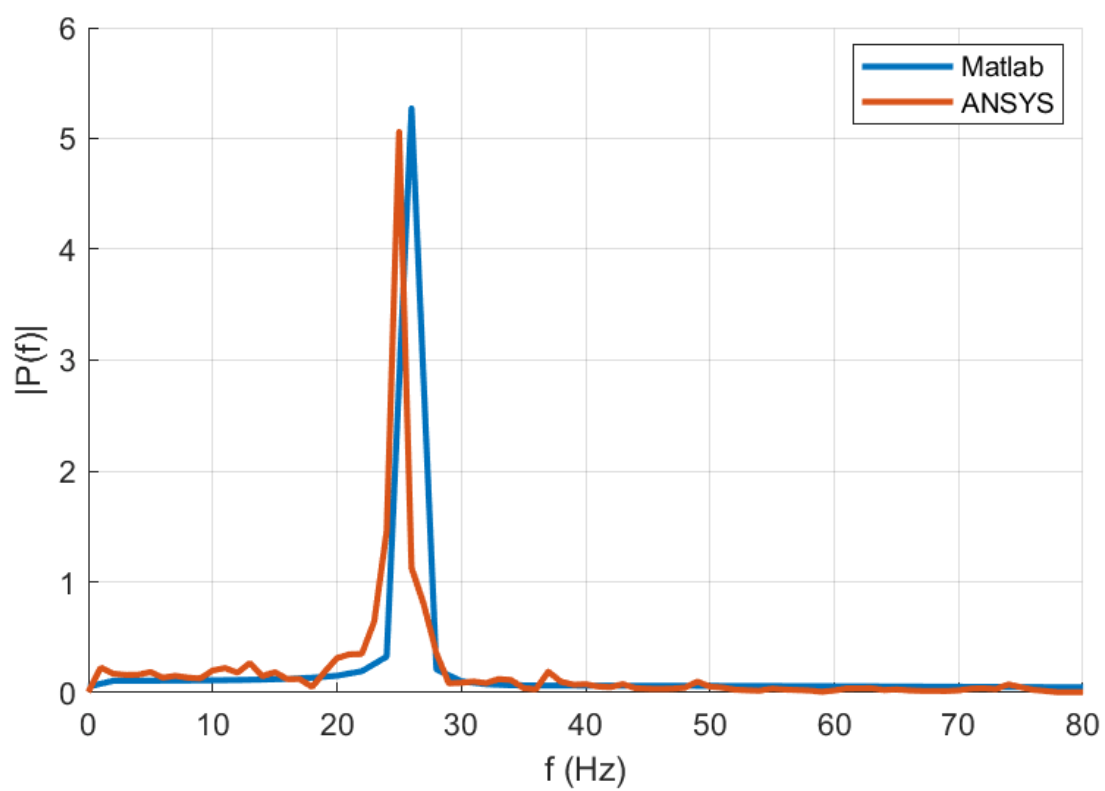


Obr. 4.1: Doska - sieť

Priebeh posuvu bodu vyznačeného na obrázku 4.1 je znázornený grafom 4.2. Posuv spracovaný algoritmom rýchlej Fourierovej transformácie (ďalej FFT) je na obrázku 4.3. Modálna analýza dosky určila hodnotu prvej vlastnej frekvencie - $25,8 \text{ Hz}$.



Obr. 4.2: Doska - posuv v čase, bez tlmenia

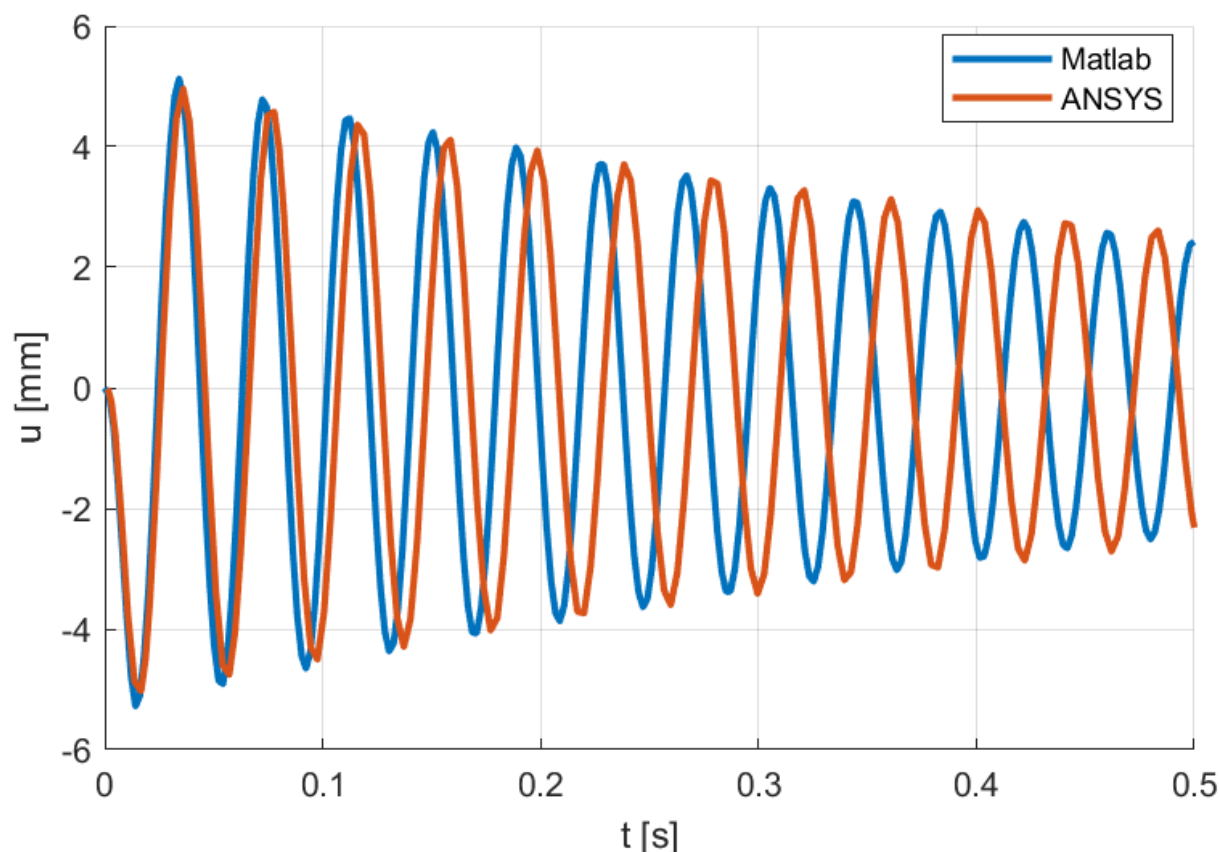


Obr. 4.3: Doska - FFT, bez tlmenia

Geometria, zaťaženie a výpočet v PDE Toolboxe s tlmením:

- Rovnaký model, OP, zaťaženie a časový krok výpočtu
- Konštrukčné tlmenie $\alpha = 0,5$
- Materiálové tlmenie $\beta = 0,001$
- Čas výpočtu - 220 s

Posuv rovnakého bodu ako v prípade bez tlmenia je na obrázku 4.4 a jeho FFT je na obrázku 4.5.

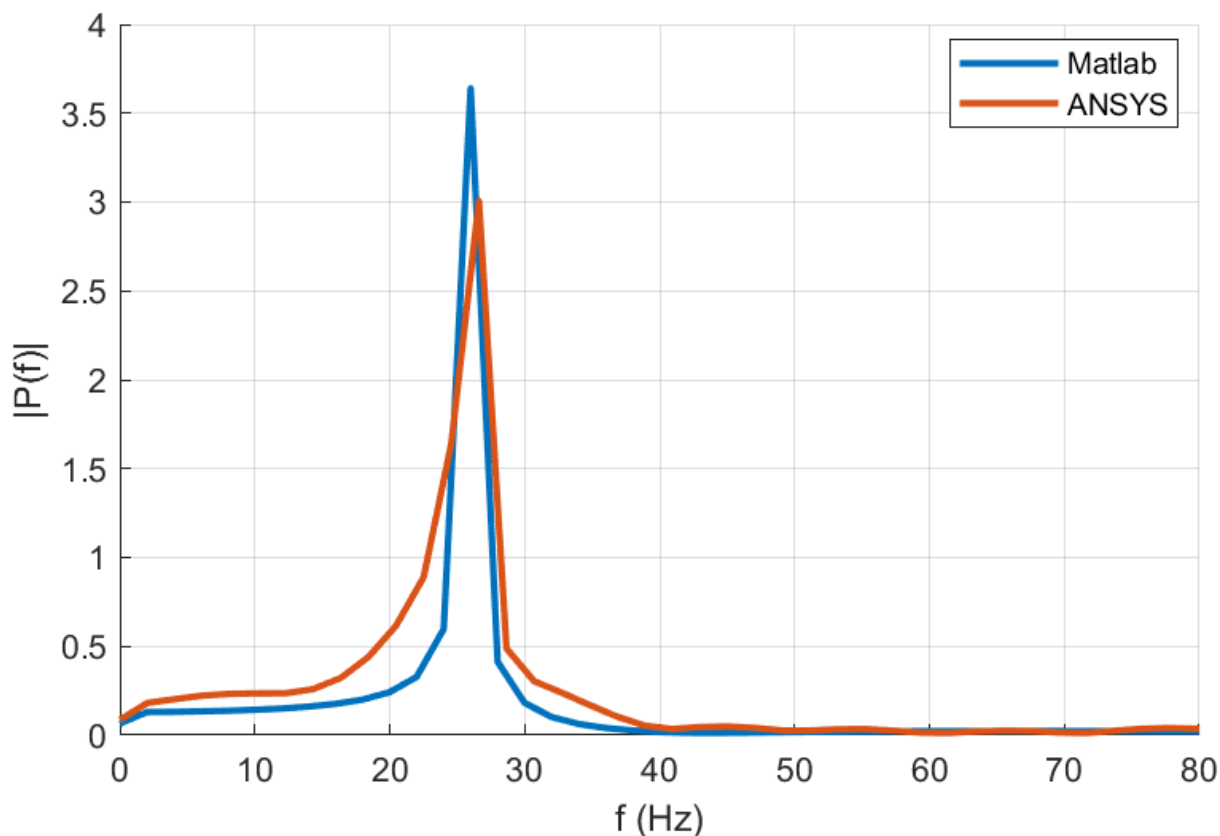


Obr. 4.4: Doska - posuv v čase, s tlmením

V oboch prípadoch sa amplitúdy kmitov približne zhodujú s výsledkami z ANSYSu a zároveň sú fázovo posunuté o takmer 1 Hz. Zataženie vybudilo prvú vlastnú frekvenciu dosky, ktorá má hodnotu 25,8 Hz. Výpočet s tlmením trval približne polovicu času.

Ako počiatočné podmienky sa nastavuje rýchlosť a posuv telesa - v tomto prípade obe nulové. Ako vstupné hodnoty je možné použiť výsledky z prechádzajúcej prechodovej analýzy.

Časový krok je zadaný vektorom. Každý člen vektoru predstavuje čas, v ktorom má výpočet prebehnúť. Nastavenie vhodného časového kroku a dĺžky trvania budenia bolo problematické.



Obr. 4.5: Doska - FFT, s tlmením

Pri zvyšovaní hodnoty tlmenia bolo možné simulovať kmitanie až do ustáleného stavu a zároveň aj priebeh s nadkritickým tlmením.

V prechodovej analýze je možné zadať iba časovo premenný normálový tlak, silu alebo posuv. Pre zaťaženie zadane ako *SurfaceTraction* (tlak v smeroch súradnicového systému) nebolo možné nastaviť časovú závislosť. Táto OP je vo výpočtoch najviac použiteľná (zavádza distribuovanú silu) na plochu. Tým sa vyvaruje singularite ako pri zadaní sily do bodu.

Pri zjemnení siete na polovicu (4 prvky na prierez), sa výpočet nezместil do pamäte. V tomto prípade mala sieť približne 13 000 uzlov. Pri testovaní rôznych kombináciách zaťaženia a časového kroku, bol výpočet extrémne dlhý a často sa nezместí do pamäte. Prechodové úlohy v PDE Toolboxe sú omedzené na telesá s malým počtom prvkov.

5 Termomechanická analýza

V tejto kapitole sú riešené dve termomechanické analýzy v ustálenom a prechodovom stave. Výsledné teplotné pole je exportované do statickej štruktúrálnej analýzy.

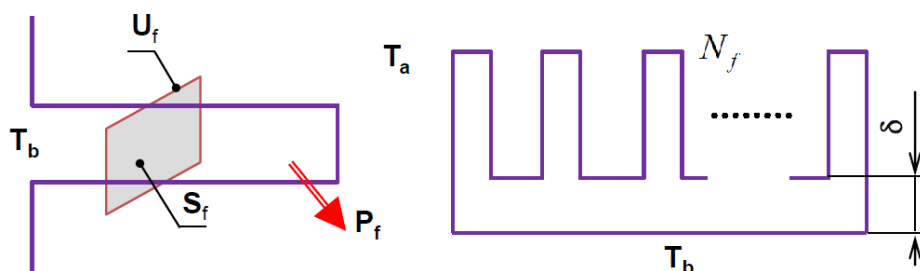
5.1 Chladič

Úloha sa venuje výpočtu odvedeného stratového výkonu hliníkovým chladičom. Výsledky sú porovnané s analytickým riešením a s numerickou simuláciou v ANSYS-e. Chladič je riešený v ustálenom a prechodovom stave a je porovnané výsledné teplotné pole. Výsledky z termomechanickej analýzy sú exportované do statickej ako zaťaženie, kde je vypočítaný maximálny posuv a napätie vo vybranom bode.

Materiálové vlastnosti a geometria chladiča:

- Modul pružnosti - $E = 71 \text{ GPa}$
- Poissonova konštanta - $\mu = 0,33$
- Súčiniteľ tepelnej rozťažnosti - $\alpha_l = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- Tepelná vodivosť - $\lambda = 240 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$
- Základné rozmery - $22 \times 22 \times 18 \text{ mm}$
- Hrúbka základne - $\delta = 3 \text{ mm}$
- Počet rebier - $N_f = 7$
- Hrúbka rebra - 2 mm

Schematické znázornenie chladiča - obrázok 5.1.



Obr. 5.1: Chladič - schéma [6]

OP - teplota $T_b = 50^\circ\text{C}$ na celú spodnú plochu a na všetky ostatné plochy konvekcia s koeficientom prestupu tepla $\alpha = 50 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ a teplotou okolia $T_a = 25^\circ\text{C}$. Prenos tepla radiáciou je zanedbaný. Teplený tok chladičom je vypočítaný podľa zdroja [6].

Účinnosť jedného rebra chladiča je daná pomerom medzi reálnym a ideálnym stavom

$$\eta_f = \frac{P_f}{P_{max}} = \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda S_f}} L\right)}{\sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda S_f}} L} \quad (5.1)$$

kde

A_f - plocha (povrch) rebra [m^2]

S_f - prierez rebra [m^2]

U - obvod prierezu rebra [m]

L - dĺžka rebra [m]

T_b - teplota základne (base) chladiča [$^{\circ}C$]

Celková účinnosť rebrovaného chladiča je

$$\eta_c = 1 - \frac{N_f A_f}{A_c} (1 - \eta_f) \quad (5.2)$$

kde $A_c = A_b + N_f \cdot A_f$ je celková plocha chladiča a A_b je plocha základne chladiča medzi rebrami [m]

Potom celkový tepelný odpor je súčet odporu dosky a rebier

$$R = \frac{\delta}{\lambda S_b} + \frac{1}{\eta_c \alpha A_c} \quad (5.3)$$

Stratový výkon odvedený chladičom sa určí podľa vzťahu

$$P = \frac{(T_b - T_a)}{R} = 5,08 \text{ W} \quad (5.4)$$

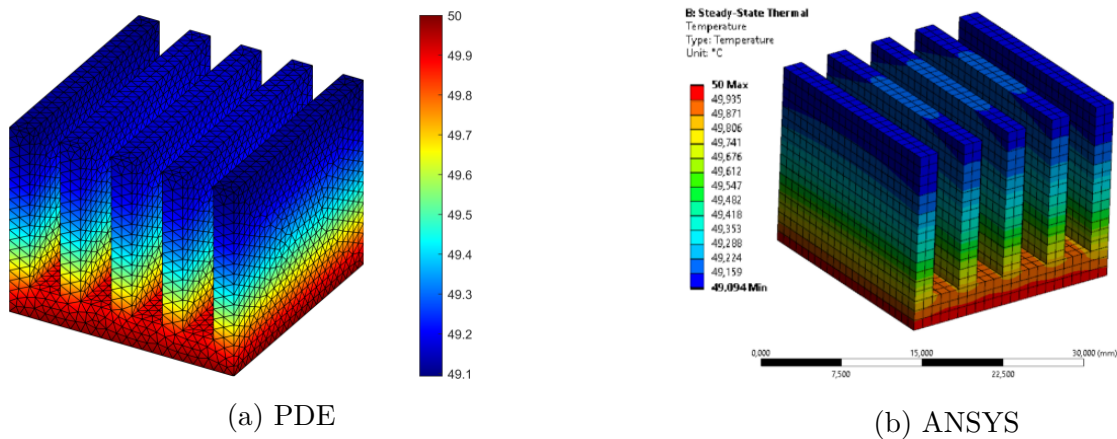
Výpočet ustáleného stavu v PDE Toolboxe:

- Maximálna veľkosť prvku - 1 mm
- Počet uzlov - 60 000
- Čas výpočtu - 5 s

Ustálený stav je na obrázku 5.2. Porovnanie výsledkov z PDE a ANSYSu je v tabuľke 5.1. Výsledky sú v dobrej zhode s analytickým riešením.

	Výkon [W]	Výkon [%]
Analycky	5,08	100,0
PDE	5,31	104,5
ANSYS	5,35	105,2

Tab. 5.1: Chladič - porovnanie výkonu



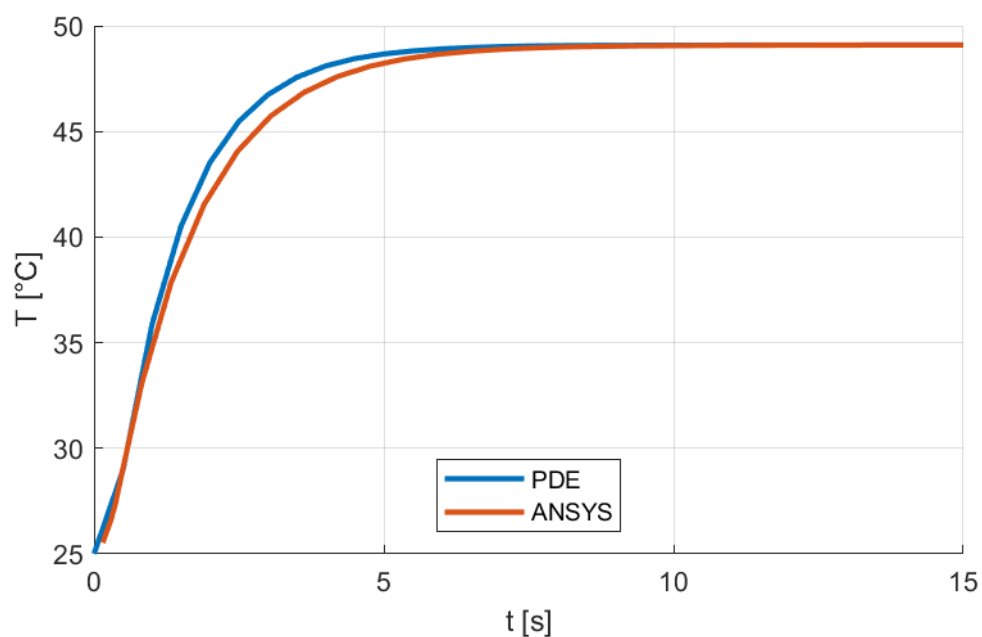
Obr. 5.2: Chladič - ustálený stav

Pri zmene veľkosti prvku siete na polovičnú a dvojnásobnú hodnotu ostal tepelný tok takmer rovnaký (zmena na druhom desatinnom mieste). Teplotné pole sa zhoduje s výpočtom v ANSYS.

Výpočet prechodového stavu v PDE Toolboxe:

- Sieť a OP rovnaké ako v predchádzajúcom prípade
- Doba simulácie 15 s s časový krok 0,5 s
- Čas výpočtu - 40 s

Priebeh teploty najvzdialenejšieho bodu od základe na krajnom rebre je na obrázku 5.3. Výsledky sa takmer zhodujú.



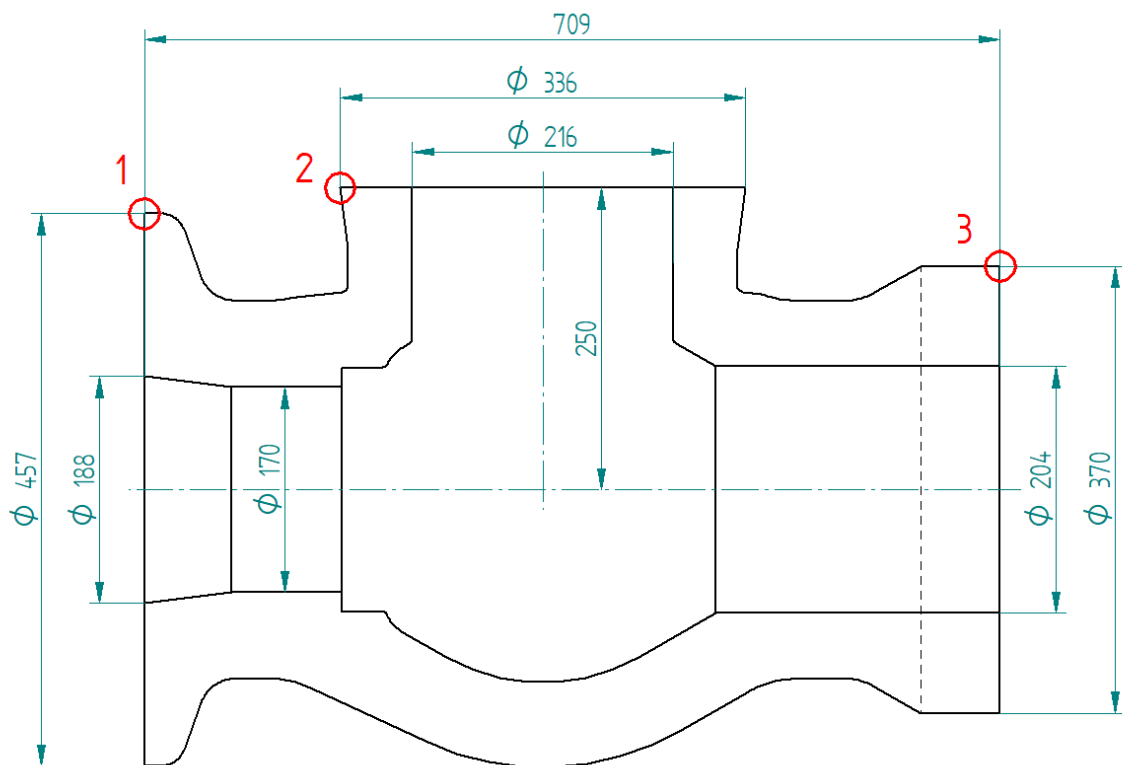
Obr. 5.3: Chladič - priebeh teploty v čase

Výsledné teplotné pole je možné exportovať do statickej analýzy ako zaťaženie. Pri následnej statickej analýze je použitá rovnaká sieť ako v termomechanickej analýze. Chladič je votknutý spodnou plochou. Dĺžka výpočtu je 20 s. Pri zjemnení siete na polovicu (4 prvky na rebro) sa výpočet nezmestí do pamäte. Maximálne napätie vzniká po hranách votknutej plochy - geometrická singularita. Redukované napätie na strede votknutej plochy v PDE $\sigma_{PDE} = 65,6 \text{ MPa}$ a v ANSYS-e $\sigma_{ANSYS} = 73,5 \text{ MPa}$. Maximálny posuv v PDE je $u_{PDE} = 0,016 \text{ mm}$ a v ANSYS-e má hodnotu $u_{PDE} = 0,018 \text{ mm}$.

5.2 Ventil

Riešenie teplotného poľa a napätosti parovodného tela ventilu. Výsledky z ustáleného a prechodového stavu sú porovnané s ANSYSom.

Základné rozmery sú na obrázku 5.4. Pre skrátenie výpočtu a zjednodušenie zadávania OP je využitá symetria.



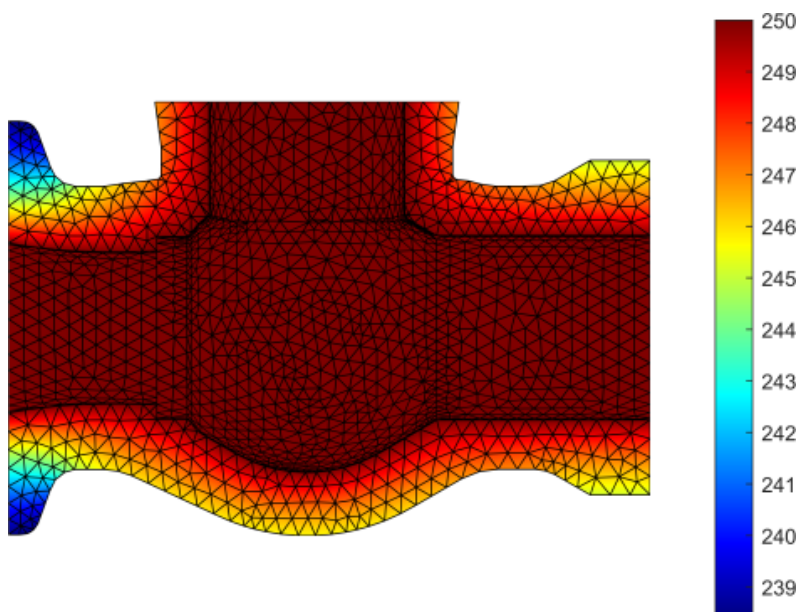
Obr. 5.4: Ventil - geometria

OP: teplota na vnútornej ploche ventilu 250°C , na všetky vonkajšie plochy (okrem čelných) je konvekcia s koeficientom prestupu tepla $\alpha = 12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ a teplotou okolia $T_a = 25^{\circ}\text{C}$. Prenos tepla radiáciou je zanedbaný.

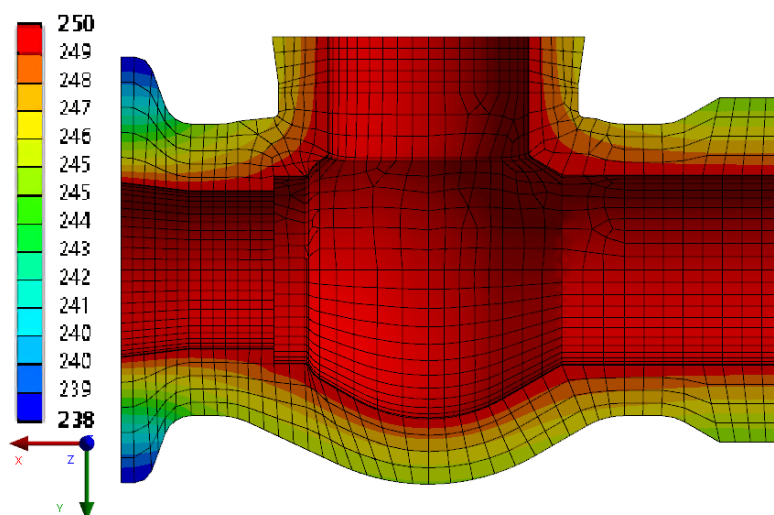
Výpočet ustáleného stavu v PDE Toolboxe:

- Maximálna veľkosť prvku - 20 mm
- Počet uzlov - 47 000
- Čas výpočtu - 580 s

Ustálený stav so zobrazenou sieťou v PDE Toolboxe a ANSYS-e je na obrázkoch 5.5 a 5.6. V tabuľke 5.2 je porovnanie teplôt v bodoch, ktoré sú vyznačené na obrázku 5.4. Výsledné teploty v ustálenom stave sú prakticky zhodné.



Obr. 5.5: Ventil - PDE sieť a teplotné pole [$^{\circ}\text{C}$]



Obr. 5.6: Ventil - ANSYS sieť a teplotné pole [$^{\circ}\text{C}$]

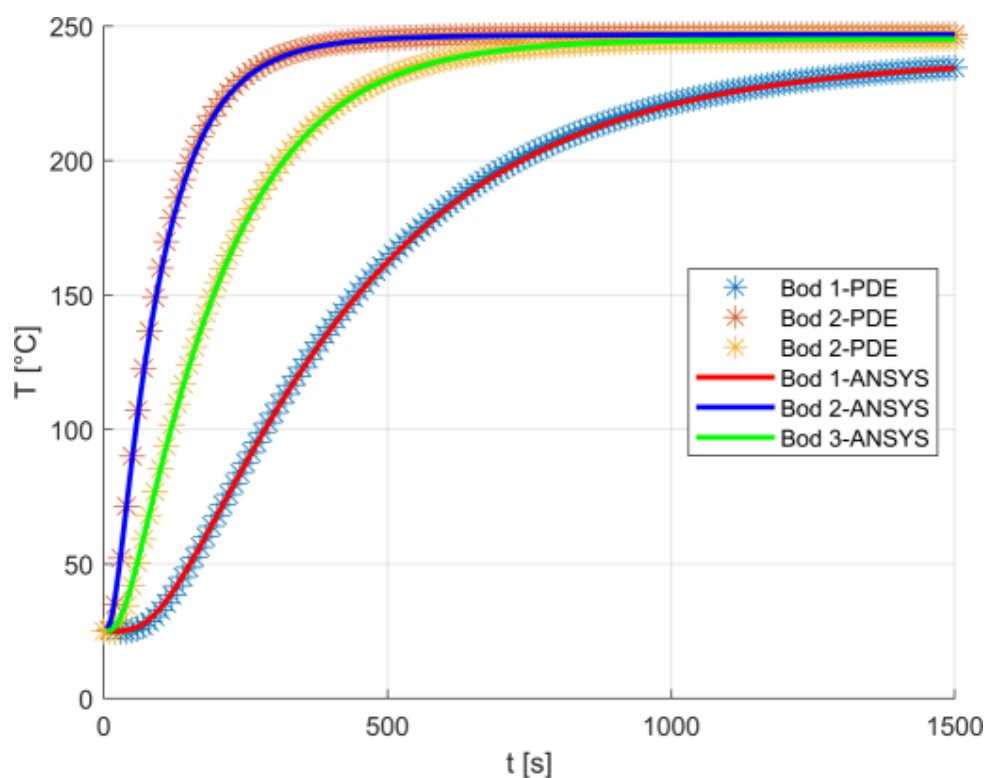
	PDE [$^{\circ}\text{C}$]	ANSYS [$^{\circ}\text{C}$]	Rozdiel [%]
Bod 1	238,52	238,45	0,03
Bod 2	246,86	246,87	-0,01
Bod 3	245,16	245,18	-0,01

Tab. 5.2: Ventil - porovnanie teplôt

Výpočet prechodového stavu v PDE Toolboxe:

- Sieť a OP rovnaké ako v predchádzajúcom prípade
- Doba simulácie 1500 s s časový krokom 10 s
- Čas výpočtu - 610 s

Priebeh teploty troch rovnakých bodov ako v ustálenom stave je na obrázku 5.7. Priebehy sú totožné.

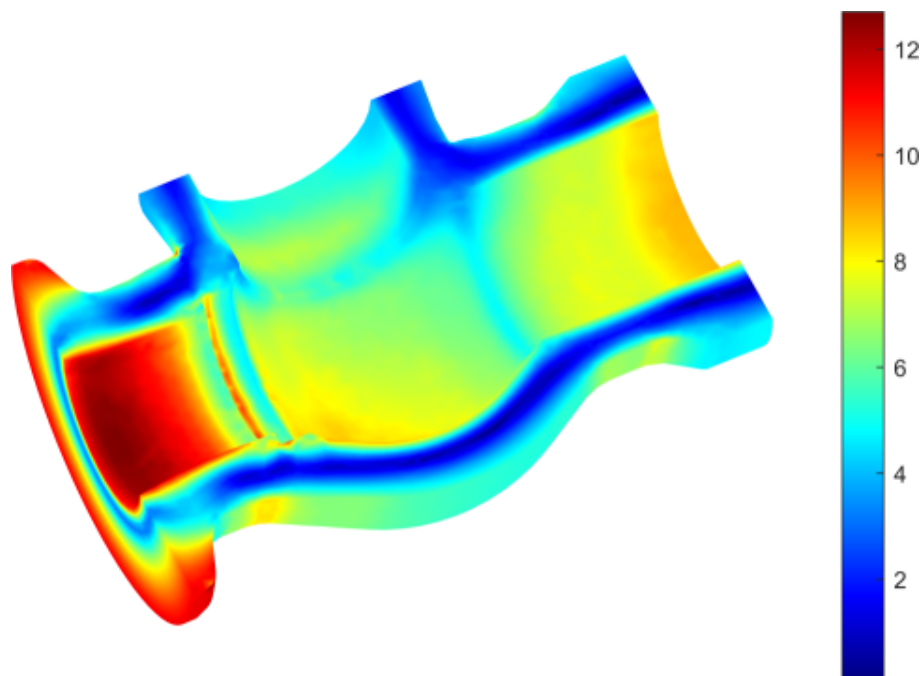


Obr. 5.7: Ventil - teplota v čase

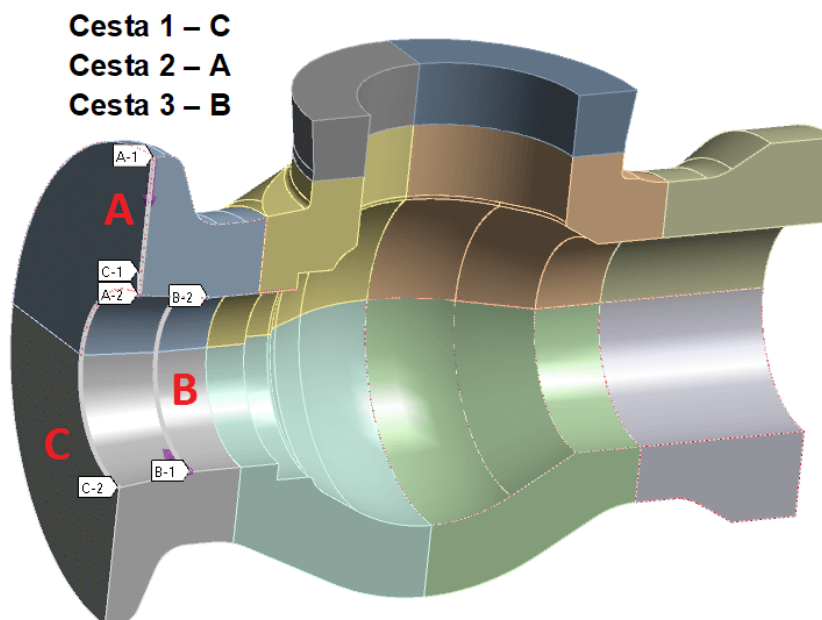
Teplotné pole je ďalej exportované do statickej štruktúrálnej analýzy ako zataženie. Sieť je rovnaká ako v termomechanickej analýze.

OP - zamedzenie posuvu v osi z na rovine symetrie, na pravej dosadacej ploche s priemerom $\varnothing 370 \text{ mm}$ zamedzenie posuvu v osi x a na ploche zvislého hrdla s priemerom $\varnothing 336 \text{ mm}$ je zamedzenie posuvu v osi y. Čas výpočtu 20 s.

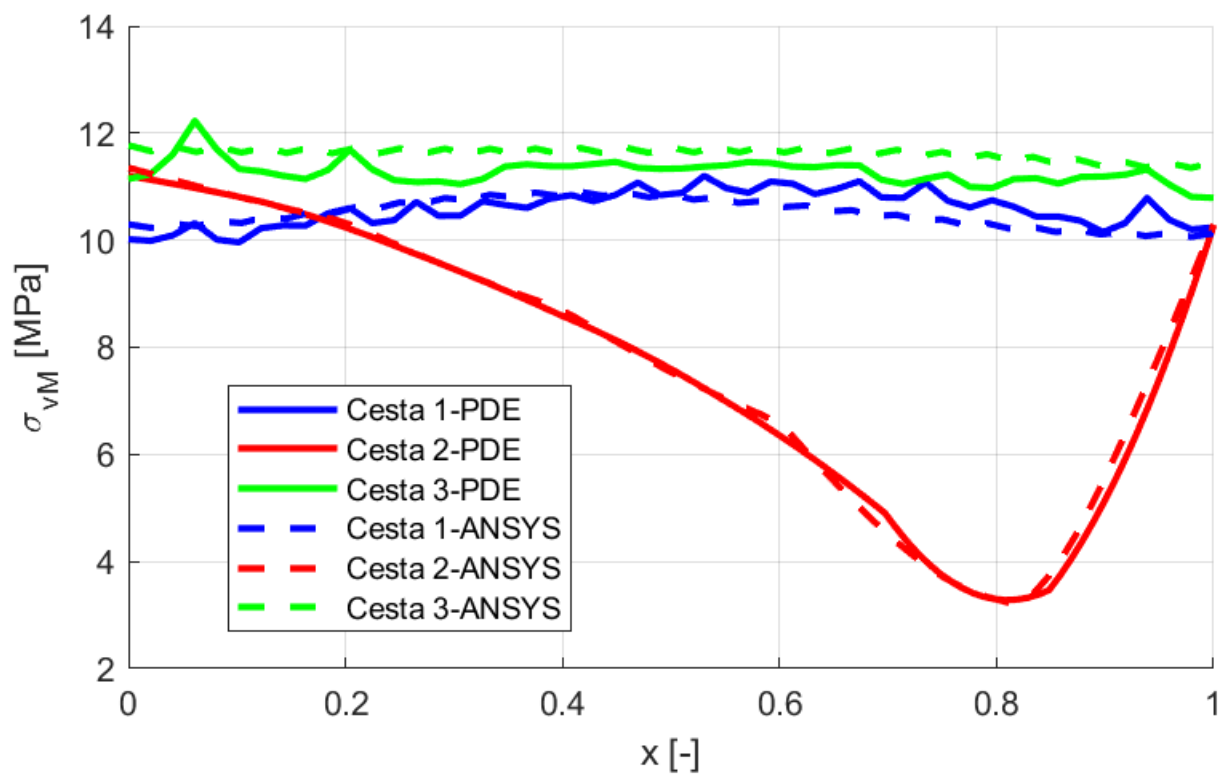
Redukované napätie je na obrázku 5.8. Obrázok 5.9 ukazuje 3 zvolené cesty pre vykreslenie redukovaného napätia. Výsledné napätie je porovnané s ANSYSom na obrázku 5.10. Dĺžka ciest bola preškálovaná na jednotkovú dĺžku. Priebehy napätí sú v dobrej zhode.



Obr. 5.8: Ventil - redukované napätie [MPa]



Obr. 5.9: Ventil - cesty



Obr. 5.10: Ventil - napätie na vybraných cestách

6 Zhodnotenie

PDE Toolbox obsahuje nástroje pre tvorbu a importovanie geometrie. Obe možnosti sú limitované na prácu s jedným telesom. PDE Modeler je zastaralý nástroj na tvorbu jednoduchej 2D geometrie, ktorý už nie je vývojármi podporovaný. Umožňuje tvorbu základných geometrických tvarov a Boolovských operácií medzi nimi. Vytváranie 3D modelov je tiež obmedzené len na základné objemy ako guľa, valec a kváder. Pre tvorbu geometrie je vhodnejšie využiť možnosti samotného MATLABu. Funkcia *polyshape* dovoľuje vytvoriť prakticky ľubovoľný tvar v 2D a funkcia *alphaShape* zložitejšie objemy.

Import modelov v STL formáte sprevádzali problémy a chybové hlásenia. Napríklad, že importovaná geometria netvorí uzatvorený objem, chyba že viac plôch zdieľa rovnakú hranu, zlučovanie susedných plôch do jednej alebo naopak vytvorenie plochy, ktorú model neobsahuje. Niektoré problémy je možné vyriešiť vhodnou úpravou CAD modelu pred importovaním. Napríklad prevedením zostavy na jedno teleso alebo vhodné zjednodušenie geometrie.

Tvorba trojuholníkovej alebo štvorstennej siete je riadená dvoma globálnymi parametrami a to maximálnou a minimálnou veľkosťou prvku. Ďalej sieť nie je možné žiadno upravovať a zjemňovať. Je to obrovský limitujúci faktor hlavne pri určovaní stavu napätosti v okolí vrubov. Pri prekročení určitého počtu uzlov (približne 10^6 na testovanom hardvéri) sa výpočet nezmestí do pamäte a začne využívať zápis na pevný disk. To rádovo predĺži čas výpočtu alebo výpočet po určitej dobe spadne. Toolbox umožňuje importovanie siete z iného programu.

Pri práci v PDE Toolboxe vznikajú situácie, kedy je potrebné zadať okrajové podmienky na časť plochy alebo hrany. Zadávanie OP však priamo toto nastavenie nemá. Prvou možnosťou je vytvoriť OP, ktorá je funkciou polohy. Ďalšia možnosť je vytvoriť množinu bodov na danej časti plochy a im predpísať OP. Popri fakte, že import geometrie sprevádza zlučovanie plôch, tak tento problém výrazne zvyšuje čas nastavenia určitých úloh alebo úplne znemožňuje ich riešenie. V kapitole 2.3 je táto problematika znázornená na príklade prútovej konštrukcie a modelovania väzby v styčníku. Pri niektorých analýzach nie je možné vytvoriť všetky požadované OP. Napríklad zamedzenie radiálneho posuvu rotačného 3D telesa, uhlová rýchlosť 3D telesa, silové OP v modálnej analýze alebo tlak iný ako normálový k ploche, ktorý je funkciou času v prechodovej analýze.

Vo všeobecnosti, PDE Toolbox určuje posuvy presne aj pri relatívnej hrubej sieti. Toto platí iba v oblasti malých deformácií. Príklad s tlakovou nádobou v kapitole 2.6 ukázal že pri väčšom pretvorení sa posuvy začínajú významne líšiť.

Hodnoty napätí, na rozdiel od posuvov, sú veľmi závislé od veľkosti prvku siete. Platí to hlavne v okolí vrubov, čo znázorňujú úlohy v kapitolách 2.8 a 2.4. Z tohoto dôvodu je presné hodnotenie napätového stavu v okolí výrazných koncentrátorov napätia a väzieb limitované na 2D úlohy. V 3D nie je možné previesť výpočet na dostatočne jemnej sieti.

V prípade geometrie kde nie sú singulárne miesta alebo mimo blízkeho okolia osamelých síl a väzieb sú výsledné napätia všeobecne v dobrej zhode s analytickým riešením alebo s numerickou simuláciou v ANSYS. Pri všetkých úlohách je vhodné sledovať ako sa mení napätie pri zmenšovaní siete. Pri minimálnej zmene je možné výsledok považovať za približne správny. V tomto smere v PDE Toolboxe platia rovnaké zákonitosti ako pri ostatných konečno-prvkových programoch.

Úloha jednostranne votknutého prútu v kapitole 2.1 ukazuje, že hodnoty reakčných síl vo väzbe sú veľmi nepresné a extrémne premenné pri zmene veľkosti prvku. Naopak príklad z kapitoly 2.2 je v približnej zhode s analytickým riešením. Výsledky reakčných síl je vhodné brať s rezervou a nespoliehať sa na ich presnosť.

Výsledky vlastných frekvencií modálnej analýzy sa odchyľujú približne 1% – 3% od výsledkov v programe ANSYS. Všetky sledované vlastné tvary sú rovnaké. Vplyv veľkosti prvku na hodnoty vlastných frekvencií je malý. Modálna analýza neumožňuje výpočet s tlmením alebo silovými okrajovými podmienkami. Pri nastavení analýzy sa zadáva frekvenčný rozsah kde má počítať vlastné frekvencie a nie ich počet, čo je nepraktické.

Prechodová úloha v PDE Toolboxe je omedzená na jednoduché úlohy s hrubou sieťou. Už pri veľmi nízkom počte uzlov približne 10^4 a 150 časových krokoch s dĺžkou 0,002 s sa výpočet nezmestil do pamäte. Časový krok sa nezadáva ako konštanta ale vektor, ktorého každý prvok je čas v ktorom je prevedený výpočet. PDE Toolbox neumožňuje nastavenie premenlivého časového kroku pre zrýchlenie výpočtu. Úloha dosky budenej krátkym impulzom v kapitole 4.1 ukazuje, že následné kmity sú frekvenciou mierne posunuté od výpočtu v ANSYS ale amplitúdou prakticky rovnaké. Úloha bez tlmenia predĺžila výpočet približne dvojnásobne oproti rovnakej úlohe s tlmením.

Pri termomechanickej analýze, podobne ako pri modálnej, sa výsledky veľmi presne zhodujú s analytickým alebo numerickým riešením v ANSYS. Vplyv veľkosti siete na výsledné teplotné pole a tepelný tok je malý. Výsledky termomechanickej analýzy je možné exportovať do štruktúrálnej analýzy ako zaťaženie. Výpočet prechodovej termálnej úlohy nie je problematický ako pri štruktúrálnej prechodovej analýze. Priebeh teplôt v čase je takmer zhodný s riešením v ANSYS. Ako v jedinej z vyššie uvedených analýz je možné zahrnúť nekonštantné materiálové vlastnosti ako napríklad teplotná vodivosť, ktorá môže byť funkciou teploty.

Práca v PDE Toolboxe často nie je užívateľsky prívetivá a neposkytuje dostatočné množstvo funkcií, ktoré by užívateľ potreboval. Taktiež práca s výsledkami a ich zisťovanie je relatívne zložitá a je to slabou stránkou PDE Toolboxu. Treba zmieniť, že PDE Toolbox sa stále vyvíja a vývojári pridávajú nové funkcie. Výhodou PDE Toolboxu je prepojitelnosť s ostatnými oblasťami MATLABu ako napríklad so SIMULINKom.

Záver

Prvá kapitola sa zaoberá matematickou podstatou PDE Toolboxu a diskretizácií partiálnych diferenciálnych rovníc. V kapitole sú taktiež zhrnuté možnosti PDE Toolboxu v tvorbe modelu, siete, geometrie, okrajových podmienok a vizualizácie výsledkov.

Druhá až piata kapitola sa venuje sérii vybraných príkladov z oblasti statickej, modálnej a prechodovej mechaniky a termomechaniky. Výsledky týchto úloh sú porovnané s analytickým riešením alebo s MKP simuláciou s programom ANSYS.

Tvorba geometrie v prostredí PDE Toolboxu je veľmi omedzená a je vhodnejšie využiť iné funkcie MATLABu. Import geometrie vo formáte STL niekedy sprevádzajú chybové hlásenie a nie je možné importovať zostavu telies. Tvorba siete je omedzená na trojuholníkové prvky v 2D a štvorstenné prvky v 3D. Sieť po vytvorení nie je možné ďalej upravovať a zjemňovať. Dá sa nastaviť len veľkosť prvku pre celú sieť.

PDE Toolbox je vhodný primárne na menšie úlohy v elastickej oblasti s malými deformáciami a s maximálne jedným analyzovaným telesom. Pri veľkom počte prvkov sa výpočet nezmestí do pamäte RAM a začne dáta zapisovať na pevný disk, čo extrémne spomalí výpočet a v mnohých prípadoch nasleduje pád MATLABu. Tento problém sa najviac prejavil pri prechodovej úlohe.

Výsledky ukazujú, že hodnoty posuvov, teplôt, vlastných frekvencií a vlastné tvary dokáže PDE Toolbox určiť s dostatočnou presnosťou aj pri relatívne hrubej sieti. Naopak na presné určenie hodnôt výsledných napätí v okolí výrazných vrubov a väzieb je potrebná veľmi jemná sieť. Mimo tieto singulárne body sú výsledky napätí dostatočne presné. Hodnoty reakčných síl vo väzbách sú aj v jednoduchej úlohe veľmi nepresné. Podrobnejšie zhodnotenie výsledkov je v kapitole 6.

Literatúra

- [1] *Partial Differential Equation Toolbox User's Guide* MathWorks [online]. Natick, MA: The MathWorks, 2021 [cit. 2020-13-05]. Dostupné z URL: <https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/pde/pde.pdf>
- [2] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., BURŠA, J.: *Pružnost a pevnost I*, VUT-FSI, Brno, 2004.
- [3] ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., JANÍČEK, P., BURŠA, J.: *Mechanika těles - pružnost a pevnost II*, VUT Brno, 2006 (CS).
- [4] HORNÍKOVÁ, Jana. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text*. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-7204-268-8. Dostupné z URL: <<http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>>
- [5] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R MISCHKE a Richard G BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. 1. vyd. V Brně: VUTIUM, 2010, xxv, 1159 s. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [6] VLACH, Radek. *Tepelné procesy v mechatronických soustavách: Prednášky*. Brno, 2021

Zoznam obrázkov

1.1	Skript v MATLABe	12
1.2	Nastavenie exportu do STL	14
1.3	Strata hrany pri importe STL [1]	14
1.4	Prvky v PDE Toolboxe [1]	16
2.1	Ohýbaný prút - redukované napätie a deformácia [MPa]	19
2.2	Ohýbaný prút - závislosť posuvu na veľkosti prvku	20
2.3	Ohýbaný prút - závislosť napätia na veľkosti prvku	20
2.4	Ohýbaný prút - závislosť počtu uzlov a dĺžky výpočtu na veľkosti prvku	21
2.5	Ohýbaný prút - závislosť reakčných síl na veľkosti prvku	21
2.6	Geometria, čiastočné a úplne uvoľnenie	22
2.7	Sieť 5 mm	23
2.8	Pôsobisko síl	23
2.9	Závislosť reakčných síl na veľkosti siete v bode A	24
2.10	Závislosť reakčných síl na veľkosti siete v bode B	24
2.11	Značenie prútov a styčníc	25
2.12	Prútová konštrukcia - uvoľnenie	25
2.13	Prútová konštrukcia - sieť	26
2.14	Prútová konštrukcia - body	26
2.15	Redukované napätie - OP na hranách	27
2.16	Priebeh napätí na jednotlivých nosníkoch - OP na hranách	28
2.17	Redukované napätie - OP v bodoch	28
2.18	Priebeh napätí na jednotlivých nosníkoch - OP v bodoch	29
2.19	Disk bez otvoru - sieť a redukované napätie	30
2.20	Disk bez otvoru - priebeh radiálneho a obvodového napätia	30
2.21	Disk bez otvoru - priebeh posuvu	30
2.22	Rotujúci disk s malým otvorom - sieť a redukované napätie [MPa]	31
2.23	Rotujúci disk s malým otvorom - priebeh radiálneho a obvodového napätia	31
2.24	Rotujúci disk s veľkým otvorom - porovnanie napätí	32
2.25	Silne zakrivený prút - geometria	33
2.26	Silne zakrivený prút - Prierez [2]	34
2.27	Silne zakrivený prút - Redukované napätie [MPa]	35
2.28	Silne zakrivený prút - porovnanie výsledkov	35
2.29	Deformovaný stav, σ_{vM} [MPa]	36
2.30	Rádus, σ_{vM} [MPa]	36
2.31	Nádoba - redukované napätie v rádiuse PDE vs ANSYS	37
2.32	Nádoba v 2D - maximálny posuv v závislosti na tlaku	37
2.33	Nádoba v 2D - maximálne redukované napätie v závislosti na tlaku	38

2.34	Geometria nádoby	39
2.35	Cesty pre vykreslenie napätia	39
2.36	Nádoba - sieť	39
2.37	Zataženie tlakom [MPa]	39
2.38	Zataženie tlakom a posuvom [MPa]	39
2.39	Zataženie tlakom - porovnanie napätia	40
2.40	Zataženie tlakom a posuvom	41
2.41	Súčiniteľ koncentrácie napätia [4]	42
2.42	Lomený prút namáhaný ohybom [4]	42
2.43	Lomený prút - σ_{vM} [MPa]	43
2.44	Lomený prút - sieť 0,5 mm	43
2.45	Lomený prút 2D - α - vplyv veľkosti prvku	44
2.46	Lomený prút 3D - α - vplyv veľkosti prvku	45
2.47	Prút s otvorom namáhaný ťahom [5]	45
2.48	Prút s otvorom - geometria a sieť	46
2.49	Prút s otvorom - α - vplyv siete	47
2.50	Prút s odsadením namáhaný ťahom [5]	48
2.51	Prút s odsadením - napätie [MPa]	49
2.52	Detail na sieť	49
2.53	Prút s odsadením namáhaný ťahom - α	49
2.54	Tyč s odsadením namáhaná ťahom [5]	50
2.55	Tyč-napätie[MPa]	51
2.56	Tyč s odsadením - detail na sieť	51
2.57	Tyč s odsadením namáhaný ťahom I - α	51
2.58	Tyč s odsadením namáhaný ťahom II - α	52
2.59	Ohrevné teleso	53
2.60	Ohrevné teleso - PDE	54
2.61	Ohrevné teleso - plochy	54
2.62	Ohrevné teleso - napätie v otvore	54
3.1	Doska - vlastné tvary	56
3.2	Doska - vlastné frekvencie v závislosti na veľkosti prvku	57
3.3	Vrtuľa - sieť	58
3.4	Vrtuľa - vlastné tvary	59
4.1	Doska - sieť	60
4.2	Doska - posuv v čase, bez tlmenia	61
4.3	Doska - FFT, bez tlmenia	61
4.4	Doska - posuv v čase, s tlmením	62
4.5	Doska - FFT, s tlmením	63
5.1	Chladič - schéma [6]	64

5.2	Chladič - ustálený stav	66
5.3	Chladič - priebeh teploty v čase	66
5.4	Ventil - geometria	67
5.5	Ventil - PDE sieť a teplotné pole [$^{\circ}C$]	68
5.6	Ventil - ANSYS sieť a teplotné pole [$^{\circ}C$]	68
5.7	Ventil - teplota v čase	69
5.8	Ventil - redukované napätie [MPa]	70
5.9	Ventil - cesty	70
5.10	Ventil - napätie na vybraných cestách	71

Zoznam tabuliek

3.1	Doska - vlastné frekvencie	55
3.2	Vrtuľa - vlastné frekvencie	58
5.1	Chladič - porovnanie výkonu	65
5.2	Ventil - porovnanie teplôt	69